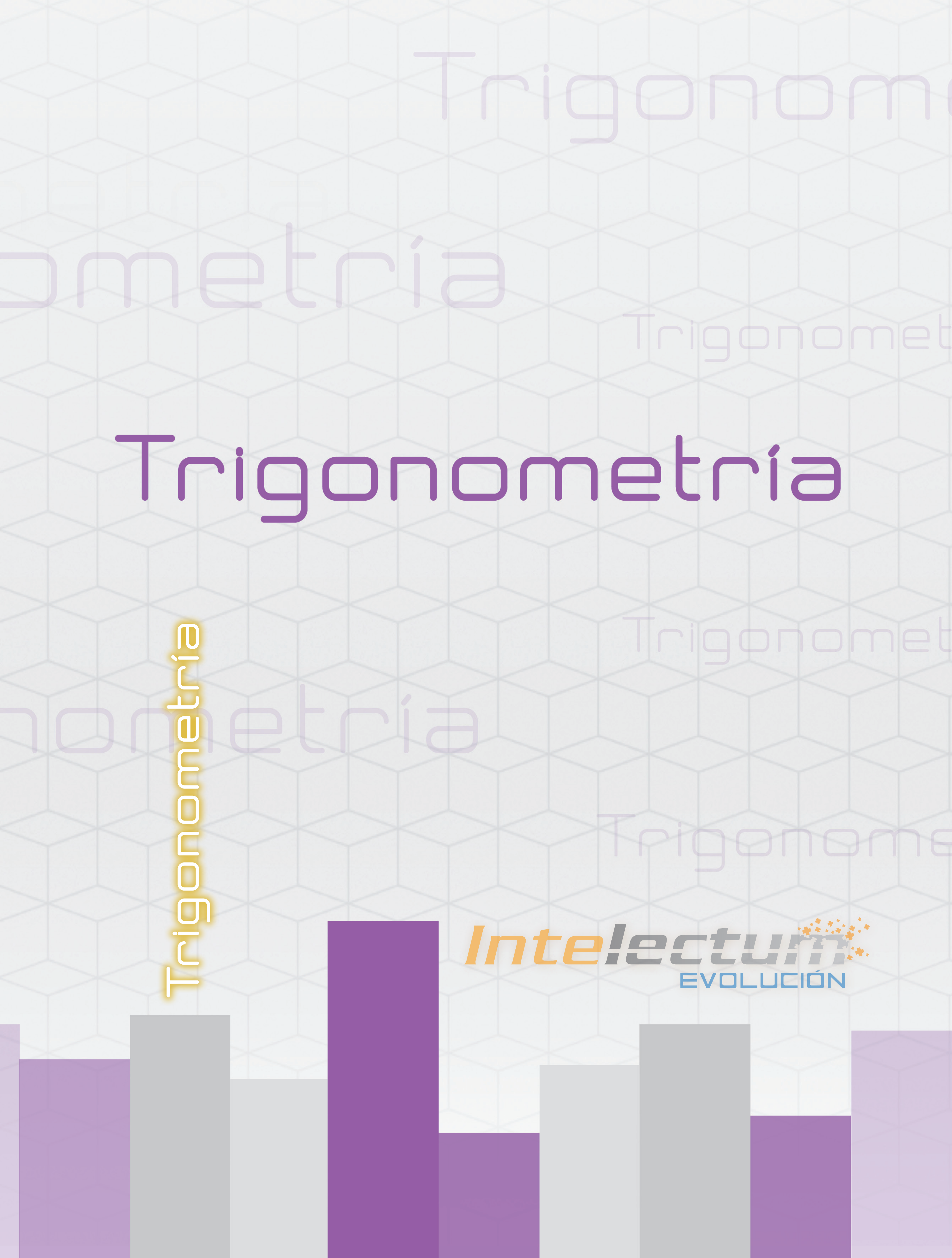

Trigonometría
Trigonometría
Intelectum
EVOLUCIÓN



Indicadores de logro

Unidad 1

- Identifica la posición final, inicial y el vértice del ángulo trigonométrico.
- Discrimina entre el sistema sexagesimal, centesimal y radial.
- Identifica las fórmulas de conversión y las equivalencias entre sistemas.
- Aplica las equivalencias entre los sistemas de medición para calcular la medida del ángulo pedido.
- Identifica los elementos de un sector circular para el cálculo de su área y de sus aplicaciones.
- Calcula el área del sector circular y el área de un trapecio circular.
- Utiliza las relaciones dadas sobre sectores circulares en diversas aplicaciones.
- Identifica los catetos y la hipotenusa en un triángulo rectángulo.
- Identifica los ángulos agudos en un triángulo rectángulo y define cada una de las razones trigonométricas.
- Determina las razones trigonométricas de ángulos agudos notables.
- Calcula el valor de las razones trigonométricas de triángulos rectángulos.

Unidad 2

- Diferencia entre ángulos de elevación y depresión.
- Determina el valor de los ángulos de elevación y depresión utilizando las razones trigonométricas.
- Define cada una de las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal.
- Identifica gráficamente cada ángulo cuadrantal.
- Determina el valor de las razones trigonométricas de ángulos coterminales.
- Identifica el cuadrante al cual pertenece cada ángulo y la forma de reducción.
- Aplica los casos estudiados para la reducción de ángulos al primer cuadrante.
- Define los elementos de una circunferencia trigonométrica (origen de arcos, origen de complementos y suplementos).
- Representa gráficamente cada línea trigonométrica y analiza su variación.

LA MINERÍA Y LAS SECCIONES CÓNICAS

La minería en el Perú ha ido evolucionando a través del tiempo. Se ha pasado de métodos empíricos a métodos técnicos para la minería a gran escala.

Uno de los métodos de explotación de la minería a gran escala es la "minería a cielo abierto", también conocida como "a tajo abierto", este método de explotación necesita del uso de conceptos trigonométricos a la hora de diseñar las cortadas mineras. Las elipses, circunferencias y parábolas son necesarias para el diseño del límite económico del tajo.

Contenido:

Unidad 1

- **Sistemas de medición angular.**
- **Sector circular.**
- **Razones trigonométricas de ángulos agudos.**
- **Resolución de triángulos rectángulos.**

Unidad 2

- **Ángulos verticales y horizontales.**
- **Razones trigonométricas de ángulos de cualquier magnitud.**
- **Reducción al primer cuadrante.**
- **Circunferencia trigonométrica.**

Unidad 3

- **Identidades trigonométricas.**
- **Ángulos compuestos.**
- **Ángulos múltiples.**
- **Transformaciones trigonométricas.**
- **Funciones trigonométricas.**

Unidad 4

- **Funciones trigonométricas inversas.**
- **Ecuaciones trigonométricas.**
- **Resolución de triángulos oblicuángulos.**
- **Secciones cónicas.**
- **Límites y derivadas de funciones trigonométricas.**

Unidad 3

- Discrimina entre las identidades fundamentales.
- Identifica las identidades de suma y diferencia de dos ángulos.
- Determina el valor de las identidades trigonométricas de un ángulo orientado.
- Aplica las identidades de ángulos compuestos al utilizar razones trigonométricas de suma o diferencia de ángulos.
- Reconoce las identidades de ángulo doble, ángulo mitad y ángulo triple.
- Aplica las transformaciones trigonométricas en problemas que impliquen la reducción de expresiones.
- Calcula el valor de expresiones trigonométricas aplicando las identidades de ángulo doble, ángulo mitad y ángulo triple.
- Comprende la división de las transformaciones trigonométricas (de suma o diferencia a producto o viceversa).
- Analiza las funciones trigonométricas e identifica el dominio y rango.
- Discrimina entre función par, impar, creciente, decreciente y periódica.
- Define las funciones inyectivas y sobreyectivas.

Unidad 4

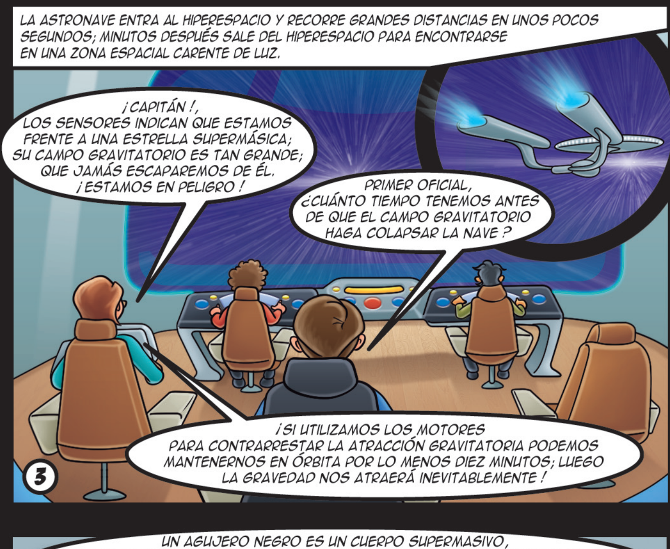
- Evalúa la gráfica de las funciones inversas y analiza su dominio y rango.
- Representa gráficamente las funciones trigonométricas inversas y evalúa la variación del dominio y rango de cada una.
- Identifica los elementos de una ecuación y analiza el método para la solución general.
- Calcula el valor de la variable, aplicando propiedades de razones trigonométricas y el valor de sus respectivos dominios.
- Identifica las relaciones dadas de la ley de senos, ley de cosenos, ley de proyecciones y ley de tangentes.
- Emplea la ley de senos, ley de cosenos, ley de proyecciones y ley de tangentes en la resolución de triángulos oblicuángulos.
- Discrimina cada una de las secciones cónicas (circunferencia, elipse y parábola) e identifica sus propiedades.
- Utiliza la ecuación de cada una de las secciones cónicas para calcular el valor de sus elementos.
- Analiza las propiedades de límites y la definición de la derivada.

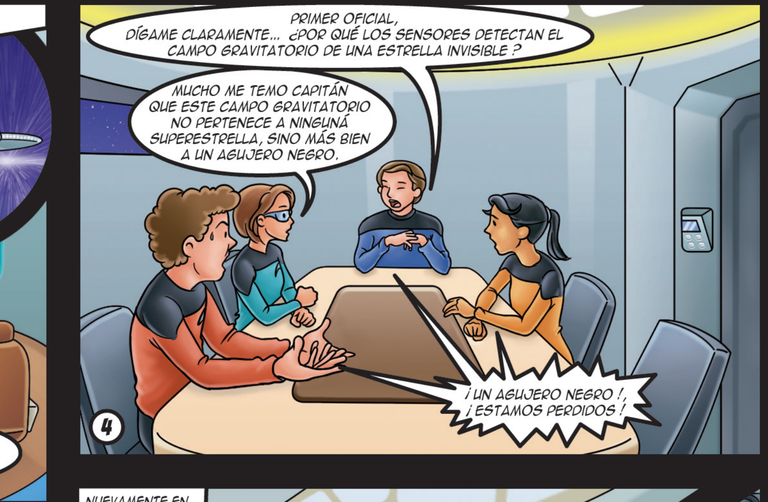


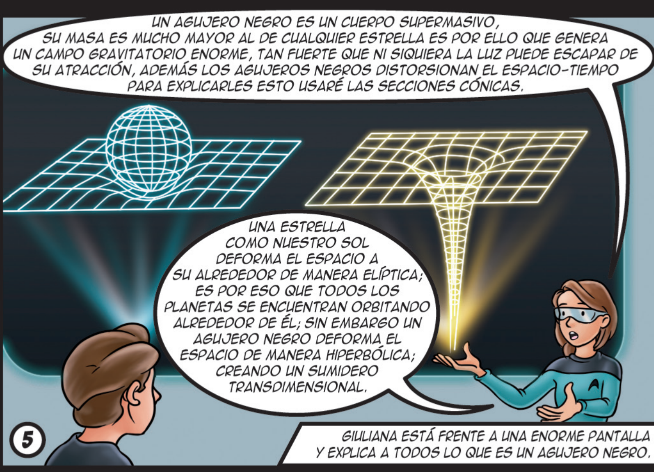
LA ÚLTIMA FRONTERA



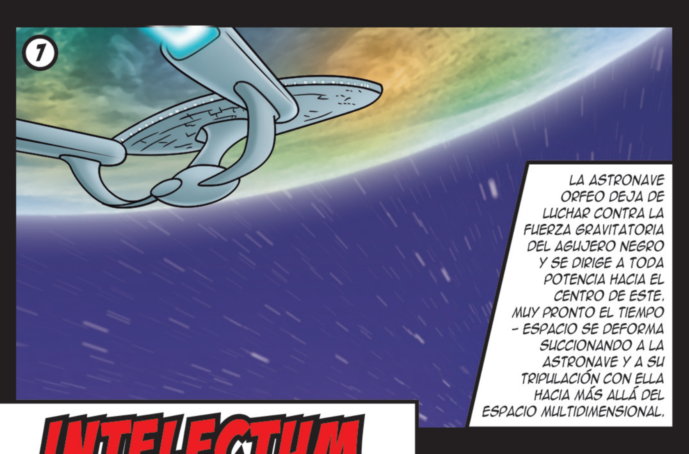




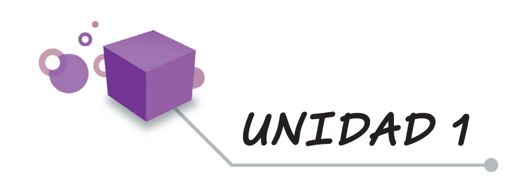








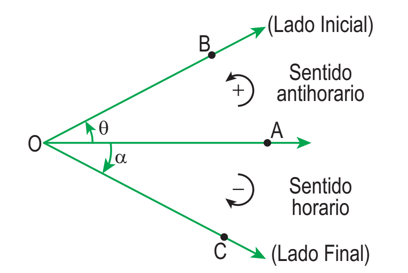




SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

Es aquella figura generada sobre un plano por la rotación de un rayo alrededor de su origen o vértice, desde una posición inicial hasta una posición final y en un sentido determinado.



$\Rightarrow m\angle AOB = \theta$, es (+)

$\Rightarrow m\angle AOC = \alpha$, es (–)

SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

Existen muchos sistemas de medida angular, ya que se pueden formar arbitrariamente, dependiendo del número de partes iguales en la que se divide el ángulo de una vuelta. A cada parte de esta división se le considera como "unidad del sistema de medida". Los sistemas considerados convencionales son:

1. Sistema sexagesimal (inglés)

Unidad
- Grado sexagesimal: (1°)

Subunidades
- Minuto sexagesimal: (1')
- Segundo sexagesimal: (1")

Equivalencias

$m\angle 1$ vuelta $= 360°$

1° = 60'	1' = 60"	1° = 3600"

Observación

a' b' c" = a° + b' + c"
(Notación de un ángulo en grados, minutos y segundos)

2. Sistema centesimal (francés)

Unidad
- Grado centesimal: (1^g)

Subunidades
- Minuto centesimal: (1^m)
- Segundo centesimal: (1^s)

Equivalencias

$m\angle 1$vuelta $= 400^g$

$1^g = 100^m$	$1^m = 100^s$	$1° = 10\,000^s$

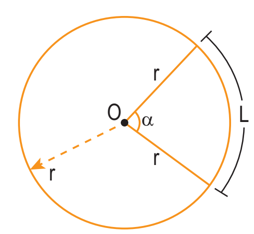
Observación:

$x^g\, y^m\, z^s = x^g + y^m + z^s$
(Notación del ángulo en grados, minutos y segundos centesimales)

3. Sistema radial o circular (internacional)

Unidad

Un radián (1 rad); definido como la medida del ángulo central que subtiende un arco de longitud igual al radio de la circunferencia a la que pertenecen.



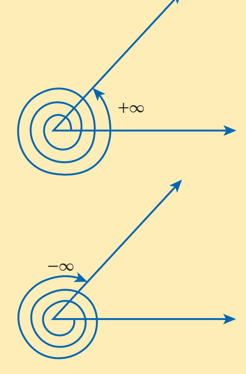
Si $L = r \Rightarrow \alpha = 1$ rad

Además:

$m\angle 1$vuelta $= 2\pi$ rad

Observaciones

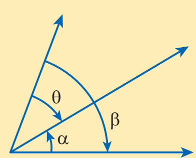
- La medida del ángulo trigonométrico no se encuentra sujeto a restricciones, puede tener cualquier magnitud.



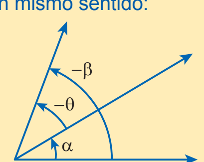
$-\infty < m\angle$trigonométrico $< +\infty$

- Al realizar operaciones de suma o sustracción de un ángulo trigonométrico, se recomienda que todos los ángulos tengan un mismo sentido de rotación.

Por ejemplo:



Cambiamos todos los ángulos a un mismo sentido:



Nota

Todos los ángulos giran con sentido antihorario

Algunos valores para π

$\pi \approx \sqrt{3} + \sqrt{2}$

$\pi \approx \frac{22}{7}$

$\pi \approx 3{,}1416$

RELACIÓN ENTRE SISTEMAS

Entre los tres sistemas de medición angular podemos obtener las siguientes equivalencias:

$$m\angle 1 \text{ vuelta} = 360° = 400^g = 2\pi \text{ rad} \Rightarrow 180° = 200^g = \pi \text{ rad}$$

Factor de conversión

Llamado también método del factor unidad, se usa para transformar un ángulo de un sistema de medida a otro.

Ejemplo:

1. Transforma 60° al sistema radial.

$$60° = 60° \times 1 = 60° \times \underbrace{\frac{\pi \text{ rad}}{180°}}_{\text{factor de conversión}} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

2. Convierte 150^g a radianes.

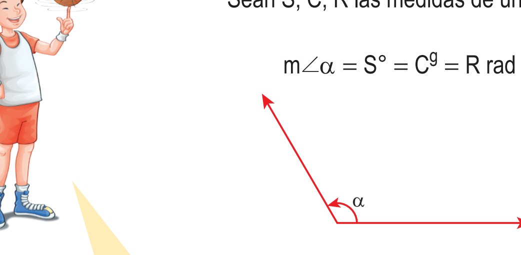
$$150^g = 150^g \times 1 = 150^g \times \underbrace{\frac{\pi \text{ rad}}{200^g}}_{\text{factor de conversión}} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Además, se pueden obtener otros factores de conversión de las equivalencias entre sistemas. Así tenemos:

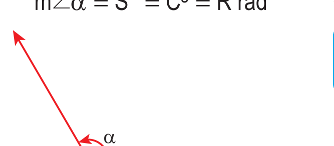
π rad = 180°	π rad = 200^g	180° = 200^g
$\frac{\pi \text{ rad}}{180°} = 1$	$\frac{\pi \text{ rad}}{200^g} = 1$	$\frac{180°}{200^g} = \frac{9°}{10^g} = 1$
$\frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 1$	$\frac{200^g}{\pi \text{ rad}} = 1$	$\frac{200^g}{180°} = \frac{10^g}{9°} = 1$

Fórmulas de conversión

Sean S, C, R las medidas de un ángulo trigonométrico en los tres sistemas, tal como muestra el gráfico:



Se cumple:



$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

Fórmula de conversión

Donde:

S: n.° de grados sexagesimales

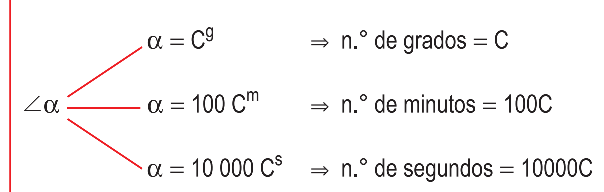
C: n.° de grados centesimales

R: n.° de radianes

- Para todo ángulo en el sistema sexagesimal.

$\angle\alpha$:
- $\alpha = S°$ ⇒ n.° de grados = S
- $\alpha = 60 \times S'$ ⇒ n.° de minutos = 60S
- $\alpha = 3600 \times S''$ ⇒ n.° de segundos = 3600S

- Para todo ángulo en el sistema centesimal.



$\angle\alpha$:
- $\alpha = C^g$ ⇒ n.° de grados = C
- $\alpha = 100\ C^m$ ⇒ n.° de minutos = 100C
- $\alpha = 10\,000\ C^s$ ⇒ n.° de segundos = 10000C

Corolario

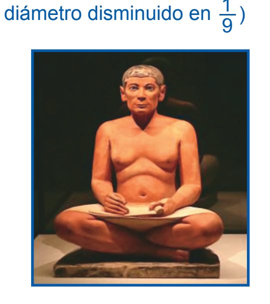
Si se trabaja con S y C:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$$

Nota

A lo largo de la historia, la expresión de pi (π) ha asumido muchas variaciones.

El papiro de Rhird, escrito por el egipcio Ahmes (1650 a.n.e) afirma que el área de un círculo es como la de un cuadrado cuyo lado es igual al diámetro disminuido en $\frac{1}{9}$)



Observación

Una forma de demostrar la fórmula general de conversión es usar la regla de tres simple:

Para un ángulo α:

$m\angle\alpha = S° = C^g = R$ rad

$m\angle 1$ vuelta —— 360°

$m\angle\alpha$ —— S°

$m\angle\alpha = \frac{m\angle 1 \text{vuelta } S}{360°}$

Análogamente para los otros sistemas, se tiene:

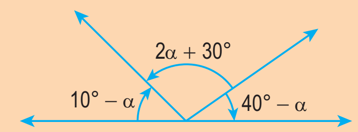
$\frac{m\angle 1 \text{vuelta } S}{360°} = \frac{m\angle 1 \text{vuelta } C}{400°}$

$= \frac{m\angle 1 \text{vuelta } R}{2\pi \text{ rad}}$

$\therefore \frac{S}{360°} = \frac{C}{400^g} = \frac{R}{2\pi \text{ rad}}$

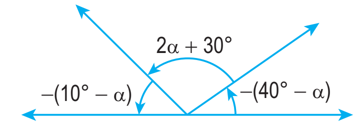
Problemas resueltos

1 Del gráfico, calcula α.



Resolución:

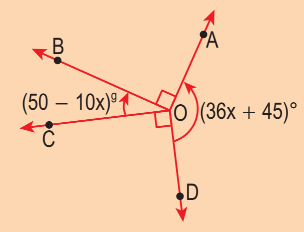
Colocamos los ángulos en un solo sentido (sentido antihorario):



Del gráfico:

$$-(10° - \alpha) + (2\alpha + 30°) - (40° - \alpha) = 180°$$
$$-10° + \alpha + 2\alpha + 30° - 40° + \alpha = 180°$$
$$4\alpha - 20° = 180°$$
$$\therefore\ \alpha = 50°$$

2 Del gráfico, encuentra X.



Resolución:

Del gráfico, invertimos el sentido de giro del $\angle$DOA. Luego:

$$\angle DOA + \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 360°$$
$$(36x + 45)° + 90° + [-(50 - 10x)^g] + 90° = 360°$$
$$(36x + 45)° - (50 - 10x)^g\ \frac{9°}{10^g} = 180°$$
$$(36x + 45)° - (45 - 9x)° = 180°$$
$$36x + 45 - 45 + 9x = 180$$
$$45x = 180$$
$$\therefore\ x = 4$$

3 Convierte 160° a radianes.

Resolución:

El ángulo es $160° \Rightarrow S = 160$

Aplicando la relación:

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$$

Reemplazando:

$$\frac{160}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$R = \frac{160\pi}{180}$$

$$R = \frac{8\pi}{9}$$

$$\therefore\ 160° = \frac{8\pi}{9}\ \text{rad}$$

4 Convierte $24{,}5^g$ a grados sexagesimales.

Resolución:

El ángulo es $24{,}5^g \Rightarrow C = 24{,}5$

Aplicando la relación:

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10}$$

Reemplazando

$$\frac{S}{9} = \frac{24{,}5}{10} \Rightarrow S = \frac{9(24{,}5)}{10}$$

$$S = 22{,}05$$

$$\therefore\ 24{,}5^g = 22{,}05° = 22°3'$$

5 Si A es en radianes el complemento de 75° y B es, en radianes, el suplemento de 144°. Calcula la siguiente expresión:

$$H = A + B - \frac{7\pi}{60}\ \text{rad}$$

Resolución:

El complemento de 75°: $90° - 75° = 15°$

Luego, aplicando la relación:

$$\frac{15}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$R = \frac{15\pi}{180} \Rightarrow R = \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow\ A = \frac{\pi}{12}\ \text{rad} \qquad \text{...(I)}$$

El suplemento de 144°: $180° - 144° = 36°$

Luego, aplicando la relación:

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$R = \frac{36\pi}{180} \Rightarrow R = \frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow\ B = \frac{\pi}{5}\ \text{rad} \qquad \text{...(II)}$$

Reemplazando (I) y (II) en la expresión:

$$H = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{5} - \frac{7\pi}{60} = \frac{5\pi + 12\pi}{60} - \frac{7\pi}{60}$$

$$H = \frac{17\pi}{60} - \frac{7\pi}{60} = \frac{10\pi}{60} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ H = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}$$

6 Expresa en grados, minutos y segundos sexagesimales $\frac{\pi}{32}$ rad.

Resolución:

Por método de factor de conversión:

$$\frac{\pi}{32}\text{ rad} = \frac{\pi}{32}\text{ rad}\,\frac{180°}{\pi\text{ rad}} = \frac{180°}{32}$$

$$\frac{\pi}{32}\text{ rad} = 5{,}625°$$

Luego:

$5{,}625° = 5° + (0{,}625) \times 1° = 5° + (0{,}625) \times 60'$

$5{,}625° = 5° + 37{,}5' = 5° + 37' + (0{,}5) \times 60''$

$5{,}625° = 5° + 37' + 30''$

$5{,}625° = 5°\ 37'\ 30''$

$\therefore\ \frac{\pi}{32}\text{ rad} = 5{,}625° = 5°\ 37'\ 30''$

7 Halla $T = \frac{S + 2C}{58R}$. Si S, C y R son los sistemas de medidas estudiadas para un mismo ángulo.

Resolución:

De la fórmula general de conversión

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{20R}{\pi} = k$$

En T:

$$T = \frac{S + 2C}{58R} = \frac{(9k) + 2(10k)}{58\left(\frac{\pi k}{20}\right)}$$

$$T = \frac{29k}{\frac{58\pi k}{20}} = \frac{20(29k)}{58\pi k}$$

$$\therefore\ T = \frac{10}{\pi}$$

8 Determina la medida en el sistema internacional, de un ángulo cuyos números convencionales cumplen la relación:

$$\sqrt{\frac{\pi}{30R} + \pi} + \sqrt{\frac{20}{3C} + \pi} + \sqrt{\frac{6}{S} + \pi} = \frac{1}{2}$$

Resolución:

De la fórmula general de conversión:

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{10}{\pi} = k$$

Reemplazamos en la expresión:

$$\sqrt{\frac{\pi}{30(k\pi)} + \pi} + \sqrt{\frac{20}{3(200k)} + \pi} + \sqrt{\frac{6}{180k} + \pi} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{30k} + \pi} + \sqrt{\frac{1}{30k} + \pi} + \sqrt{\frac{1}{30k} + \pi} = \frac{1}{2}$$

$$3\sqrt{\frac{1}{30k} + \pi} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{30k} + \pi} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{30k} + \pi = \frac{1}{36}$$

$$\frac{1}{30k} = \frac{1}{36} - \pi$$

$$\frac{1}{30k} = \frac{1 - 36\pi}{36}$$

$$k = \frac{6}{5(1 - 36\pi)}$$

Luego: la medida del ángulo en el sistema internacional será:

$$R = k\pi = \frac{6\pi}{5 - 180\pi}$$

9 Convierte $\frac{5\pi}{4}$ rad a grados sexagesimales.

Resolución:

El ángulo es $\frac{5\pi}{4}$ rad $\Rightarrow$ $R = \frac{5\pi}{4}$

Aplicando la equivalencia:

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$$

Reemplazando:

$$\frac{S}{180} = \frac{5\pi/4}{\pi}$$

$$\frac{S}{180} = \frac{5\pi}{4\pi}$$

$$S = \frac{180(5\pi)}{4\pi}$$

$$S = 225$$

$$\therefore\ \frac{5\pi}{4}\text{ rad} = 225°$$

10 Se tienen tres ángulos tal que al sumar sus medidas de dos en dos se obtiene: 12°, 10^g y $\frac{\pi}{36}$ rad

Halla la medida del menor de los ángulos.

Resolución:

Sean los ángulos: A, B y C

Del enunciado:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 12° \\ B + C &= 10^g <> 9° \\ A + C &= \frac{\pi}{36} <> 5° \end{aligned}\right\}(+)$$

$$\underbrace{A + B} + C = 13°$$

$$12° + C = 13°$$

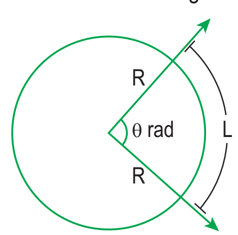
$$C = 1°$$



T

LONGITUD DE ARCO EN UNA CIRCUNFERENCIA

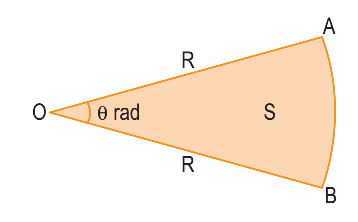
El arco de una circunferencia es una porción de ella comprendida entre dos puntos. Sea **L** la longitud de un arco AB en una circunferencia de radio **R** con un ángulo central θ rad, se verifica:



$$L = \theta R \quad \dots (1)$$

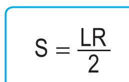
ÁREA DE UN SECTOR CIRCULAR

El sector circular es una porción de círculo limitado por dos radios y el arco correspondiente. Sea **S** el área del sector circular AOB de ángulo central θ rad y de radio **R**. Se verifica:



$$S = \frac{\theta R^2}{2} \quad \dots (2)$$

De las expresiones (1) y (2), se deducen las siguientes expresiones para el cálculo del área de un sector circular:

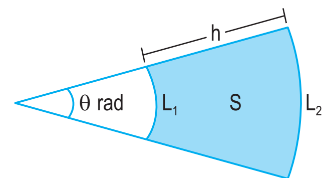


$$S = \frac{LR}{2} \qquad S = \frac{L^2}{2\theta}$$

ÁREA DE UN TRAPECIO CIRCULAR

El trapecio circular está definido como una porción de corona circular, limitada por dos radios. El cálculo de su área se obtiene de la expresión:

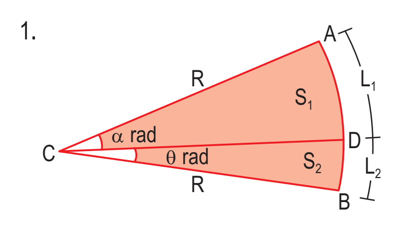
$$S = \left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)h$$



$$\theta = \frac{L_2 - L_1}{h}$$

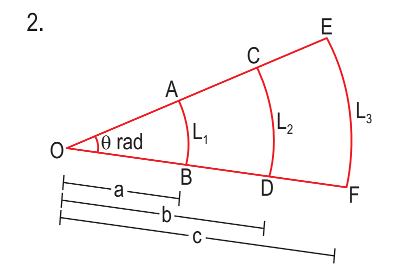
Propiedades

1.



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\alpha}{\theta}$$

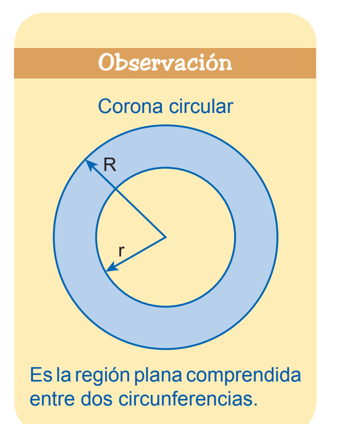
2.



$$\frac{L_1}{a} = \frac{L_2}{b} = \frac{L_3}{c}$$

Observación

Corona circular

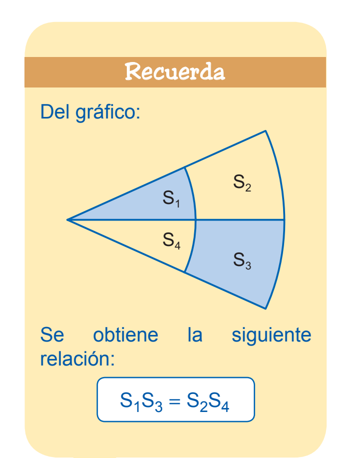


Es la región plana comprendida entre dos circunferencias.



Recuerda

Del gráfico:



Se obtiene la siguiente relación:

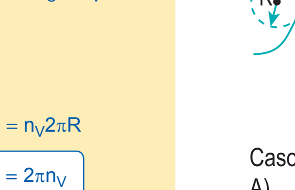
$$S_1S_3 = S_2S_4$$



APLICACIONES

1. Ruedas - n.° vueltas

Si una rueda gira por una superficie de forma dada, se cumple:

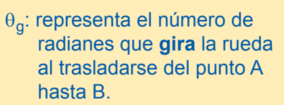


$$n_V = \frac{L_C}{2\pi R}$$

$$L_C = \theta_g . R$$

Donde:
n_V: número de vueltas que da la rueda al desplazarse de A hacia B.
θ_g: giro de la rueda en radianes.
L_C: longitud recorrida por el centro de la rueda.
R: radio de la rueda.

Recuerda



θ_g: representa el número de radianes que **gira** la rueda al trasladarse del punto A hasta B.

Además:

$$\frac{L_C}{2\pi R} = n_V \Rightarrow L_C = n_V\, 2\pi R$$

donde:
$L_C = \theta_g . R$

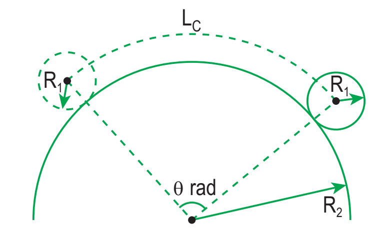
Entonces:
$$\theta_g R = n_V 2\pi R$$

$$\theta_g = 2\pi n_V$$



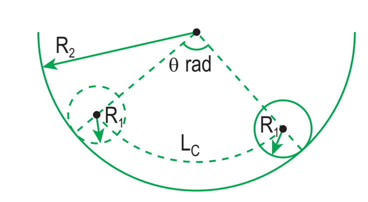
Casos particulares

A)



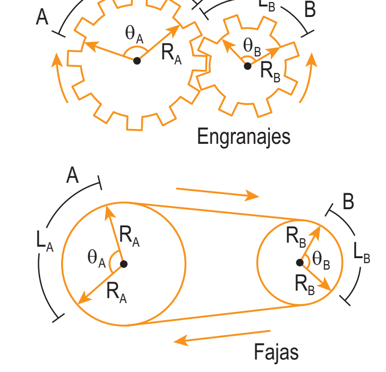
$$n_V = \frac{L_C}{2\pi R_1} \qquad \therefore\ n_V = \frac{\theta(R_2 + R_1)}{2\pi R_1}$$

B)



$$n_V = \frac{L_C}{2\pi R_1} \qquad \therefore\ n_V = \frac{\theta(R_2 - R_1)}{2\pi R_1}$$

2. Engranajes - fajas



- En cada caso si A gira un ángulo θ_A, entonces B girará otro ángulo θ_B.
- Además, las longitudes de arco que se desplazan son iguales, es decir:

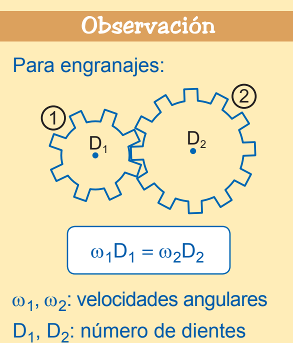
$$L_A = L_B$$

De donde se concluye:

$$\theta_A R_A = \theta_B R_B \qquad n_A R_A = n_B R_B$$

Observación

Para engranajes:

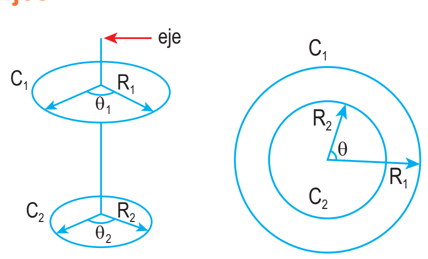


$$\omega_1 D_1 = \omega_2 D_2$$

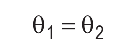
ω_1, ω_2: velocidades angulares
D_1, D_2: número de dientes



3. Ejes



Ruedas unidas por un eje



$$\theta_1 = \theta_2$$



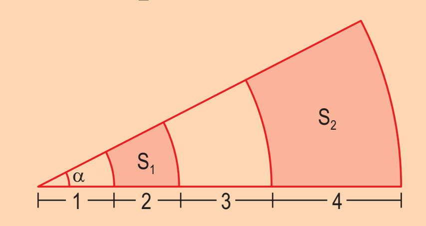
$$\Rightarrow \quad n_1 = n_2$$

θ_1, θ_2: ángulo de giro realizado por C_1 y C_2 respectivamente.

R_1; R_2: radios de C_1 y C_2.

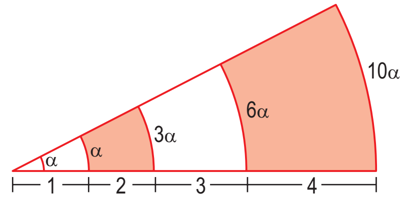
n_1, n_2: número de vueltas de C_1 y C_2.

1 En la figura, $S_2 - S_1 = \frac{7}{2}\pi$, halla α.



Resolución:

Tenemos:



$$S_2 - S_1 = \frac{7}{2}\pi$$

$$\frac{(10\alpha + 6\alpha)}{2}4 - \frac{(3\alpha + \alpha)}{2}2 = \frac{7}{2}\pi$$

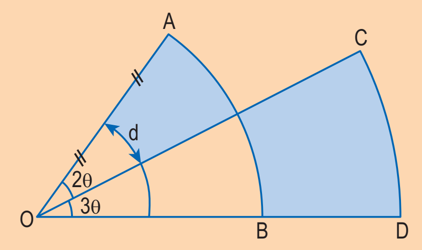
$$4\left(\frac{16\alpha}{2}\right) - (4\alpha) = \frac{7}{2}\pi$$

$$32\alpha - 4\alpha = \frac{7}{2}\pi$$

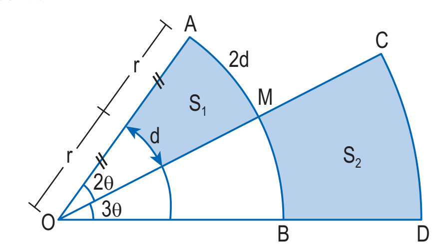
$$28\alpha = \frac{7}{2}\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{8}$$

2 Del gráfico, calcula el área sombreada en términos de θ y d, además $OA = L_{\widehat{CD}}$.



Resolución:



De la figura:

$OA = 2r$

$L_{\widehat{AM}} = (2r)(2\theta) = 4\theta r$

$\Rightarrow 2d = 4\theta r \Rightarrow d = 2\theta r$

$L_{\widehat{MB}} = (3\theta)(2r) = 6\theta r = 3d$

Por dato: $OA = L_{\widehat{CD}} = 2r$

- $2r = 3\theta(2r + BD)$

$$BD = \frac{2r}{3\theta} - 2r = \frac{d(1 - 3\theta)}{3\theta^2}$$

$$S_1 = \left(\frac{d + 2d}{2}\right)r = \frac{3dr}{2} = \frac{3d^2}{4\theta}$$

$$S_2 = \left(\frac{3d + 2r}{2}\right)BD = \left(3d + \frac{d}{\theta}\right)\left[\frac{d}{6\theta^2}(1 - 3\theta)\right]$$

$$= \frac{d^2}{6\theta^3}(3\theta + 1)(1 - 3\theta) = \frac{d^2}{6\theta^3}(1 - 9\theta^2)$$

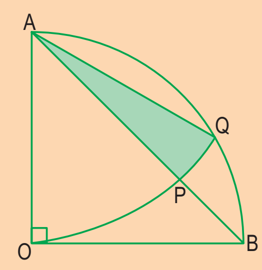
$$S_1 + S_2 = \frac{3d^2}{4\theta} + \frac{d^2}{6\theta^3}(1 - 9\theta^2)$$

$$S_1 + S_2 = \frac{d^2}{\theta}\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{6\theta^2} - \frac{3}{2}\right]$$

$$S_1 + S_2 = \frac{d^2}{\theta}\left[\frac{2 - 9\theta^2}{12\theta^2}\right]$$

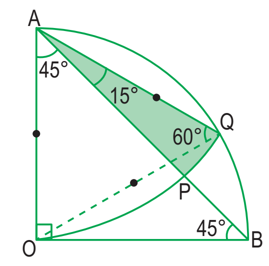
$$S_1 + S_2 = \frac{d^2}{12\theta^3}(2 - 9\theta^2)$$

3 Halla el área de la región sombreada, si:
$OA = OB = AP = AQ = 4$ cm



Resolución:

$AO = OQ = OB =$ Radio



Tenemos:

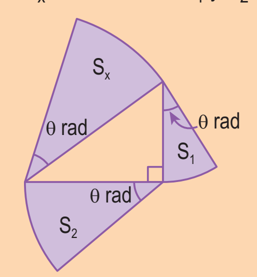
$15° = \frac{\pi}{12}$ rad

Luego:

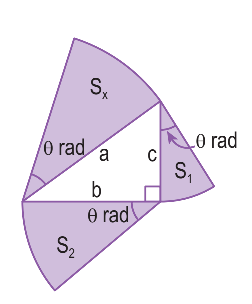
$$S = \frac{\frac{\pi}{12}}{2}(4)^2$$

$$S = \frac{2}{3}\pi \text{ cm}^2$$

4 De la figura, halla S_x en función de S_1 y S_2.



Resolución:



De S_x:

$$S_x = \frac{\theta}{2} \cdot a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{2S_x}{\theta}$$

De S_1:

$$S_1 = \frac{\theta}{2}c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{2S_1}{\theta}$$

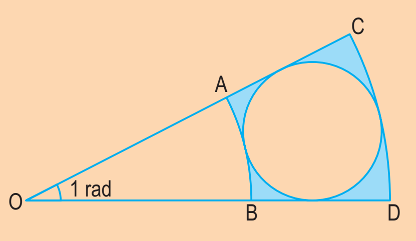
De S_2:

$$S_2 = \frac{\theta}{2}b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{2S_2}{\theta}$$

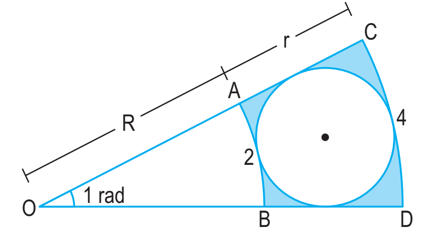
Por Pitágoras tenemos: $a^2 = c^2 + b^2$

$$\frac{2S_x}{\theta} = \frac{2S_1}{\theta} + \frac{2S_2}{\theta} \Rightarrow S_x = S_1 + S_2$$

5 De la figura mostrada, ¿cuál es el área de la región sombreada, si $L_{\overset{\frown}{AB}} = 2$ m, $L_{\overset{\frown}{CD}} = 4$ m, además AOB y COD son sectores circulares?



Resolución:



Tenemos que:

$L = \theta R$

Para

$\triangle$AOB: $2 = 1 \cdot R$ ...(1)

$\triangle$COD: $4 = R + r$ ...(2)

De (1) y (2): $r = 2$

Luego:

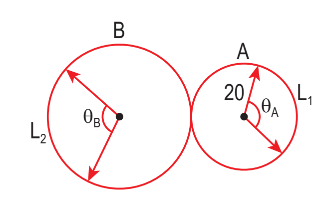
$$A = \left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)r - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$A = \left(\frac{2+4}{2}\right)2 - \pi(1)^2$$

$$A = (6 - \pi)\ m^2$$

6 Se tienen dos ruedas tangentes con centros fijos, si A gira θ_A teniendo un radio igual a 20, calcula el diámetro de B si esta gira θ_B, además: $\frac{\theta_A}{\theta_B} = \frac{9}{10}$

Resolución:



Se cumple: $L_1 = L_2$

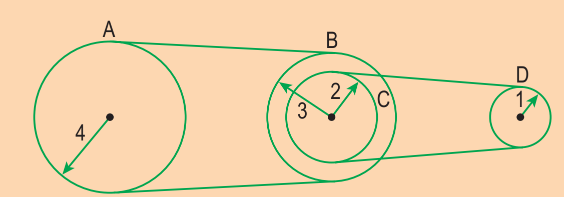
$\theta_A \cdot R_A = \theta_B \cdot R_B$

$\frac{\theta_A}{\theta_B} \cdot 20 = R_B$

$R_B = \frac{9}{10} \cdot 20 = 18$

Piden: $2R_B = 2(18) = 36$

7 En el sistema mostrado la polea de radio 1 da 4 vueltas. ¿Qué ángulo gira la polea de radio 4?



Resolución:

Las poleas D y C están unidas por fajas entonces:

$n_D r_D = n_C r_C$

$(4)(1) = n_C(2)$

$n_C = 2$

Las poleas B y C tienen el mismo eje por lo tanto:

$n_C = n_B = 2$

Finalmente, A y B están unidos por fajas, se cumple:

$n_A r_A = n_B r_B$

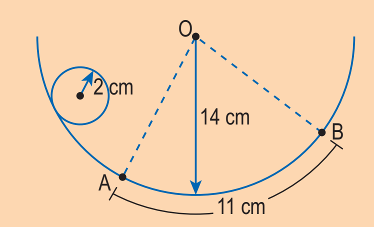
$n_A(4) = (2)\,3$

$\frac{\theta_A}{2\pi}(4) = 6$

$\theta_A = 3\pi \text{ rad} = 3\pi \text{ rad}\,\frac{180°}{\pi \text{ rad}}$

$\therefore \theta_A = 540°$

8 Cuántas vueltas da la rueda mostrada cuando gira sin resbalar desde A hasta B (considera $\pi = 22/7$)



Resolución:

Para el ejercicio, sabemos:

$$n_V = \frac{\theta(R-r)}{2\pi r} \qquad \ldots (1)$$

Por dato:

$R = 14$ cm, $\quad r = 2$ cm

$L_{\overset{\frown}{AB}} = \theta_R = 11 \text{ cm} \Rightarrow \theta = \frac{11}{14}$

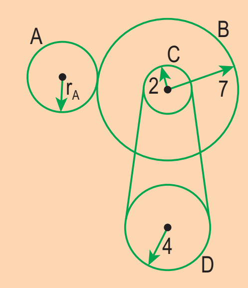
En (1):

$$n_V = \frac{\frac{11}{14}(14-2)}{2\pi(2)} = \frac{11(12)}{14 \cdot 4 \cdot \frac{22}{7}}$$

$\Rightarrow n_V = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$\therefore$ La rueda da 0,75 vueltas desde A hasta B.

9 En el sistema de poleas mostrado, cuando la polea D da 6 vueltas, la polea A da 28 vueltas.
¿Cuál es el radio de la polea A?



Resolución:

Poleas C y D unidas por una banda, entonces:

$n_C r_C = n_D r_D$

$n_C(2) = (6)4$

$n_C = 12$

Poleas C y B unidas por el mismo eje:

$n_C = n_B = 12$

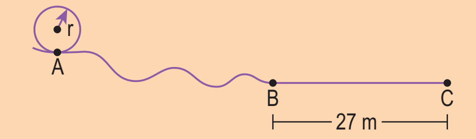
Finalmente, A y B poleas en contacto, entonces:

$n_A r_A = n_B r_B$

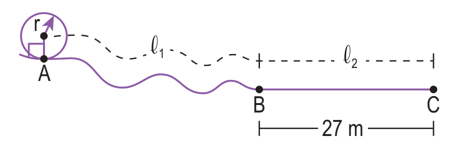
$(28) r_A = 12(7)$

$\therefore r_A = 3$

10 Del gráfico, la rueda se traslada de A a C sin resbalar, la longitud que recorre el centro de la rueda de A a B es igual a 17 m. Si la rueda da 7 vueltas desde A hasta C, ¿cuál es el radio de la rueda? (Considera $\pi = \frac{22}{7}$)



Resolución:



De la expresión: $n_v = \frac{\ell_c}{2\pi r}$

De los datos:

$\ell_c = \ell_1 + \ell_2$; $n_v = 7$

$\ell_c = 17 + 27$

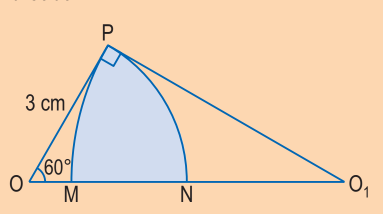
$\ell_c = 44$ m

Reemplazando:

$z = \frac{44}{2\pi r}$

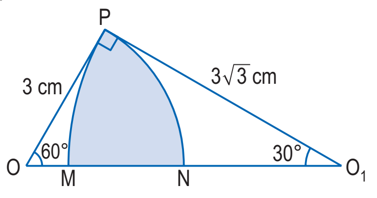
$r = \frac{22}{7\pi} = \frac{22}{7 \cdot \frac{22}{7}} \qquad \therefore r = 1$ m

11 En la siguiente figura O y O_1 son centros. Calcula el perímetro de la región sombreada.



Resolución:

En el gráfico:



En el $\angle$OPN: $L_{\overset{\frown}{PN}} = \left(\frac{60°}{180°}\pi\right)(3 \text{ cm}) = \pi$ cm

En el $\angle O_1$PM: $L_{\overset{\frown}{PM}} = \left(\frac{30°}{180°}\right)(3\sqrt{3} \text{ cm}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ cm

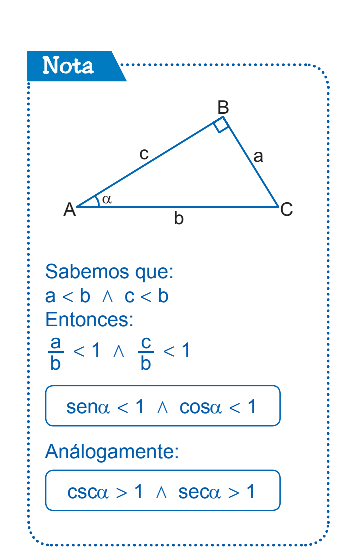
En el $\triangle OPO_1$: $\underbrace{MN + OM}_{} + NO_1 = 6$ cm

$3 \text{ cm} + MO_1 - MN = 6$ cm

$3 \text{ cm} + 3\sqrt{3} \text{ cm} - MN = 6 \text{ cm} \Rightarrow MN = (3\sqrt{3} - 3)$ cm

Piden: $\left(\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi + 3\sqrt{3} - 3\right)$ cm

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS



Sabemos que:
$a < b \wedge c < b$
Entonces:
$\frac{a}{b} < 1 \wedge \frac{c}{b} < 1$

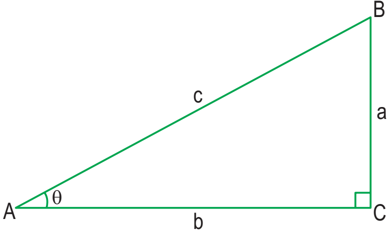
$\operatorname{sen}\alpha < 1 \wedge \cos\alpha < 1$

Análogamente:

$\csc\alpha > 1 \wedge \sec\alpha > 1$

DEFINICIÓN

Son los diferentes cocientes que se obtienen entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, con respecto a uno de sus ángulos agudos. Sea el triángulo rectángulo ACB, respecto al ángulo agudo **A** definimos:



Se cumple:

- Ángulos complementarios

$$m\angle A + m\angle B = 90°$$

- Teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

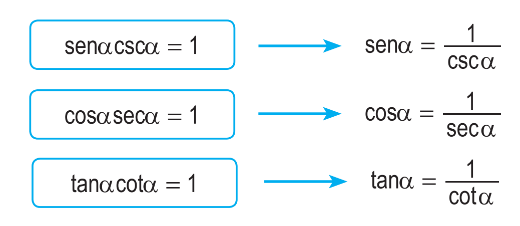
$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$



PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Razones trigonométricas recíprocas

Para un mismo ángulo, si el producto de dos razones trigonométricas es igual a la unidad, entonces son recíprocas.



Atención

Se puede afirmar para un mismo ángulo:

Recíprocos: sen y csc; cos y sec; tan y cot



Ejemplo:

Calcula $\beta + 20°$, si β es agudo:

$\operatorname{sen}36° \csc\beta = 1$

$\operatorname{sen}36° = \frac{1}{\csc\beta}$

$\operatorname{sen}36° = \operatorname{sen}\beta$

β agudo:

$\Rightarrow \beta = 36°$

$\therefore \beta + 20° = 56°$

Nota:
Sean α, β, θ, x, y, z, ángulos agudos:

$\operatorname{sen}\alpha \csc x = 1 \Rightarrow \alpha = x$

$\cos\beta \sec y = 1 \Rightarrow \beta = y$

$\tan\theta \cot z = 1 \Rightarrow \theta = z$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Sean α y β ángulos complementarios ($\alpha + \beta = 90°$), se cumple:

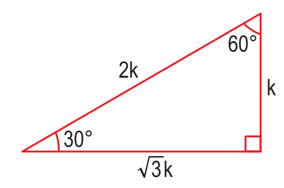
$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ $\quad$ $\tan\alpha = \cot\beta$ $\quad$ $\sec\alpha = \csc\beta$

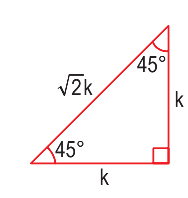
Ejemplos:

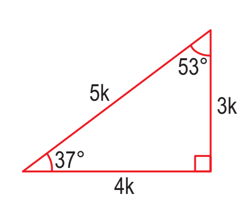
- $\operatorname{sen}40° = \cos50°$
- $\tan70° = \cot20°$
- $\sec30° = \csc60°$

Razones trigonométricas de ángulos notables

Estas razones se obtienen a partir de triángulos rectángulos notables donde la proporción entre sus lados y la medida de sus ángulos interiores es conocida.



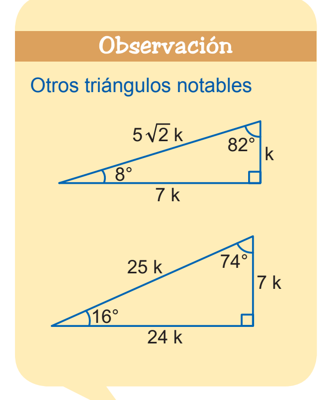




	sen	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

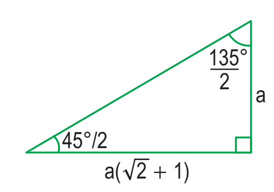
Observación

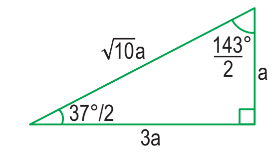
Otros triángulos notables

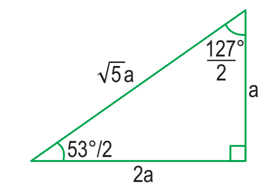




A partir de estos triángulos rectángulos se pueden obtener otros notables:

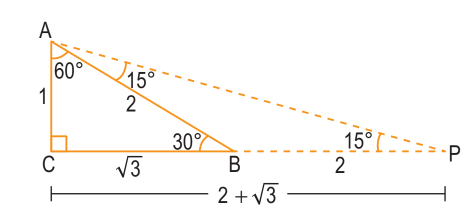






Ejemplos:

1. Calcula tan15°, en:



Resolución:

En el triángulo ACB notable de 30° y 60° prolongamos $\overline{CB}$ hasta el punto P, tal que BP = BA.

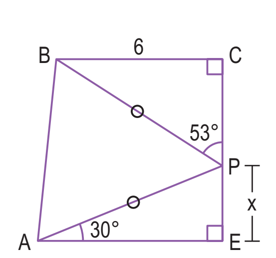
Luego, ABP isósceles; en el △ACP:

m∠ APC = 15°

Entonces:

$$\tan 15° = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

2. En la figura, halla x:



Resolución:

El triángulo rectángulo BCD es notable de 53° y 37°, como BC = 6, entonces: $BP = \frac{15}{2}$

En el triángulo isósceles BPA: $BP = AP = \frac{15}{2}$

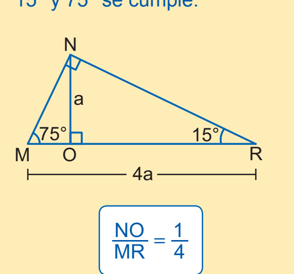
Luego en el ⊿APE notable de 30° y 60°, se tiene:

$$x = \frac{AP}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{15}{4}$$

Observación

Para el triángulo notable de 15° y 75° se cumple:

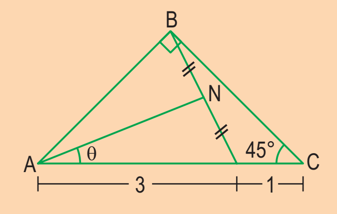


$$\frac{NO}{MR} = \frac{1}{4}$$

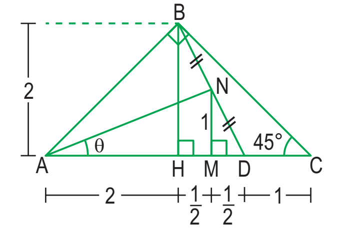


Problemas resueltos

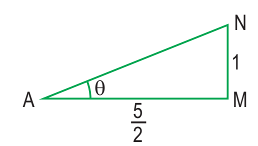
1 Según el gráfico, calcula senθ.



Resolución:



Trazamos $\overline{BH}$ y $\overline{NM}$ los cuales determinan puntos medios en $\overline{AC}$ y $\overline{HD}$ respectivamente. De la figura, tenemos:



$$\text{sen}\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{29}}{2}}$$

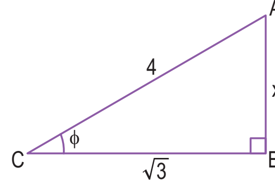
$$\text{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{2}{29}\sqrt{29}$$

2 Si: $\cos\phi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, ϕ es agudo, calcula:

$J = 13\csc^2\phi + 3\tan^2\phi$

Resolución:

Sea ϕ ángulo agudo en el $\triangle ABC$:



Por el teorema de Pitágoras:

$x^2 + (\sqrt{3})^2 = 4^2$

$x^2 = 16 - 3$

$x = \sqrt{13}$

En J:

$J = 13\csc^2\phi + 3\tan^2\phi$

$$J = 13\left(\frac{4}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$J = 13 \cdot \frac{4^2}{(\sqrt{13})^2} + 3 \cdot \frac{(\sqrt{13})^2}{3}$$

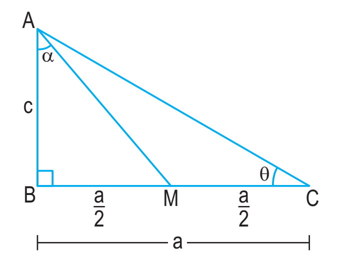
$J = 16 + 13$

$\therefore\ J = 29$

3 En un triángulo ABC ($B = 90°$) se traza la mediana AM (M en $\overline{BC}$); y se cumple que: $m\angle BAM = \alpha$; $m\angle ACB = \theta$.
Calcula: $Q = \tan\alpha\tan\theta$.

Resolución:

Del enunciado:



Luego:

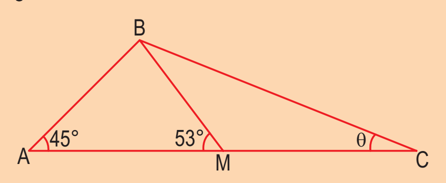
$Q = \tan\alpha\tan\theta$

$$Q = \frac{\frac{a}{2}}{c} \cdot \frac{c}{a}$$

$$Q = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a}$$

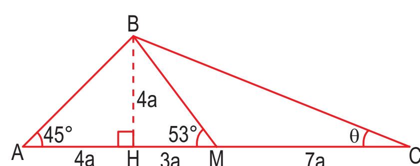
$$\therefore\ Q = \frac{1}{2}$$

4 En el triángulo ABC, si $\overline{BM}$ es mediana, calcula $\cot\theta$.



Resolución:

Trazamos la altura BH = 4a



⊿ AHB notable de 45°:

AH = BH = 4a

⊿ BHM notable de 37° y 53°:

HM = 3a

Luego:

AM = MC = 7a

En $\triangle$BHC:

$$\tan\theta = \frac{BH}{HC} = \frac{4a}{10a}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{2}{5}$$

5 Si: $\tan(3\theta - 60°)\text{sen}\beta\tan2\theta\csc\beta = 1$
Calcula θ.

Resolución:

Sabemos que:

$$\text{sen}\beta\csc\beta = 1 \wedge \frac{1}{\tan2\theta} = \cot2\theta$$

$$\tan(3\theta - 60°) = \cot2\theta$$

Por ser co-razones tenemos:

$(3\theta - 60°) + 2\theta = 90°$

$5\theta = 150°$

$\therefore \theta = 30°$

6 Si: $\cos(3x - y + 10°)\sec(x - y + 50°) = 1$,
calcula: $J = \sec3x\cos^2(2x + 5°)$

Resolución:

$\cos(3x - y + 10°)\sec(x - y + 50°) = 1$
cos y sec son razones recíprocas:
$3x - y + 10° = x - y + 50°$
$2x = 40°$
$x = 20°$
En J:
$J = \sec3x\cos^2(2x + 5°)$
$J = \sec60°\cos^245°$
$J = 2\,.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$
$\therefore\ J = 1$

7 $\cos3x\sec69° = 1 \wedge \tan y = \cot63°$, donde y, 3x agudos.
Calcula: $P = \csc^2(2x - 1°)\text{sen}^2(2y + 6°)$

Resolución:

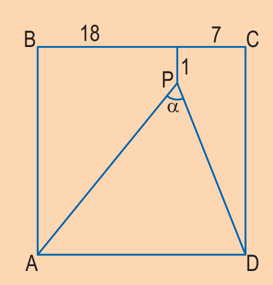
De los datos:
$\cos3x\sec69° = 1$
cos y sec son razones recíprocas:
$3x = 69°$
$x = 23°$
$\tan y = \cot63°$
y; 63° son ángulos complementarios:
$y + 63° = 90°$
$y = 27°$
En P:
$P = \csc^2(2\,.\,23° - 1°)\,.\,\text{sen}^2(2.27 + 6°)$
$P = \csc^245°\,.\,\text{sen}^260°$
$P = (\sqrt{2})^2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
$\therefore\ P = \frac{3}{2}$

8 Halla (a + b) en las siguientes expresiones:
$\text{sen}(a + 30°) = \cos(4a + 10°)$
$\tan(b + 20°)\cot50° = 1$
siendo a y b agudos.

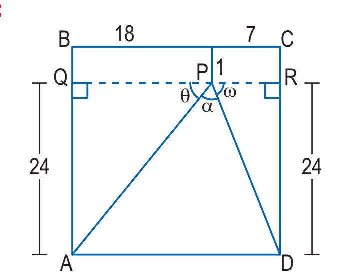
Resolución:

De los datos:
$\text{sen}(a + 30°) = \cos(4a + 10°)$
$(a + 30°)$ y $(4a + 10°)$ son ángulos complementarios:
$a + 30° + 4a + 10° = 90°$
$5a = 50°$
$a = 10°$
$\tan(b + 20°)\cot50° = 1$
tan y cot son razones recíprocas:
$b + 20° = 50°$
$b = 30°$
$\therefore\ a + b = 40°$

9 Calcula $\cos\frac{\alpha}{2}$, si ABCD es un cuadrado.



Resolución:

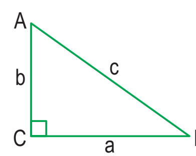


Trazamos $\overline{QP}$ y $\overline{PR}$:
⊿ AQP notable de 37° y 53°
$\Rightarrow\ \theta = 53°$
⊿ DRP notable de 16° y 74°
$\Rightarrow\ \omega = 74°$
Luego:
$\theta + \omega + \alpha = 180°$
$53° + 74° + \alpha = 180°$
$\alpha = 53°$
$\therefore \cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{53°}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

10 En un triángulo rectángulo ABC (recto en C), se cumple:
$\text{sen}A + \text{sen}B + \cos A + \cos B = 3$
Calcula el valor de E:
$E = \tan A + \tan B$

Resolución:

Del enunciado, se tiene el gráfico:



- $\text{sen}A = \frac{a}{c} \wedge \cos A = \frac{b}{c}$
- $\text{sen}B = \frac{b}{c} \wedge \cos B = \frac{a}{c}$
- $a^2 + b^2 = c^2$

Del enunciado: $\text{sen}A + \text{sen}B + \cos A + \cos B = 3$
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = 3 \Rightarrow \frac{a + b}{c} = \frac{3}{2}$

Luego: $\frac{(a + b)^2}{c^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c^2} = \frac{9}{4}$

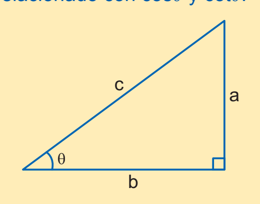
$\Rightarrow \frac{c^2 + 2ab}{c^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{2ab}{c^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{5}{8}$

Piden: $\tan A + \tan B = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{8}{5}$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Atención

El lado opuesto de θ está relacionado con $\text{sen}\theta$ y $\tan\theta$.
El lado adyacente de θ está relacionado con $\cos\theta$ y $\cot\theta$.



$\text{sen}\theta = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c\,\text{sen}\theta$

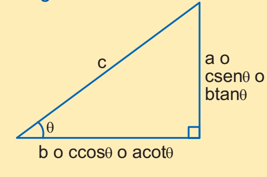
$\cos\theta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c\cos\theta$

$\tan\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b\tan\theta$

$\cot\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\cot\theta$



Luego:

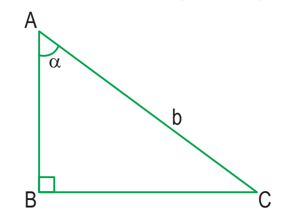




CASOS

Se presentan los siguientes casos:

Conocidos un ángulo agudo (α) y la hipotenusa (b)

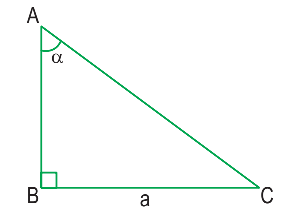


Datos: hipotenusa "b" y un ángulo agudo "α"
Incógnita: determinar los catetos en función de "b" y "α"

En el ⊿ ABC: $\text{sen}\alpha = \frac{BC}{b} \Rightarrow BC = b\,\text{sen}\alpha$

$\cos\alpha = \frac{AB}{b} \Rightarrow AB = b\cos\alpha$

Conocidos un ángulo agudo (α) y su cateto opuesto (a)

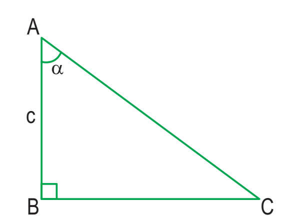


Datos: cateto opuesto "a" y un ángulo agudo "α"
Incógnita: determinar el otro cateto y la hipotenusa en función de "a" y "α"

En el ⊿ ABC: $\cot\alpha = \frac{AB}{a} \Rightarrow AB = a\cot\alpha$

$\csc\alpha = \frac{AC}{a} \Rightarrow AC = a\csc\alpha$

Conocidos un ángulo agudo (α) y su cateto adyacente (c)



Datos: cateto adyacente "c" y un ángulo agudo "α"
Incógnita: determinar el otro cateto y la hipotenusa en función de "c" y "α"

En el ⊿ ABC: $\tan\alpha = \frac{BC}{c} \Rightarrow BC = c\tan\alpha$

$\sec\alpha = \frac{AC}{c} \Rightarrow AC = c\sec\alpha$

Nota

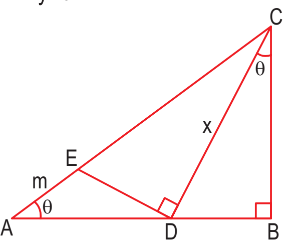
El área de una región triangular está dada por el semiproducto de dos de sus lados multiplicado por el seno del ángulo que forman dichos lados

θ, b, a, S

$S = \frac{a.c}{2}\text{sen}\theta$

Ejemplos:

1. Del gráfico, calcula "x" en términos de "m" y "θ".

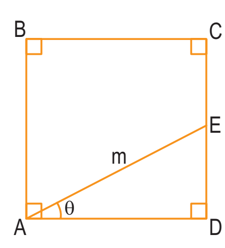


Resolución:

△ AED: isósceles: m∢EAD = m∢EDA
entonces: AE = ED = m

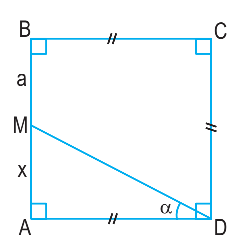
$\triangle$ EDC: por ángulo exterior: $m\measuredangle CED = 2\theta$
además: $CD = ED\tan 2\theta$
$x = m\tan 2\theta$

2. Según el gráfico, halla el perímetro del cuadrado ABCD en función de θ y m.



Resolución:
$\triangle$ ADE: $AD = AE\cos\theta$
$= m\cos\theta$
Luego: $2p = 4m\cos\theta$

3. Del gráfico que se muestra, halla x en términos de a y α.

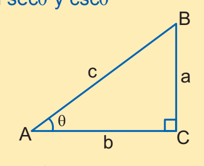


Resolución:
$\square$ABCD: $AD = a + x$
$\triangle$ MAD: $MA = AD\tan\alpha$
$x = (a + x)\tan\alpha$
$x = a\tan\alpha + x\tan\alpha$
$x(1 - \tan\alpha) = a\tan\alpha$

$$x = \frac{a\tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$$



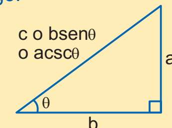
La hipotenusa de un triángulo rectángulo está relacionada con $\sec\theta$ y $\csc\theta$



$\sec\theta = \frac{c}{b} \Rightarrow c = b\sec\theta$

$\csc\theta = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\csc\theta$

Luego:





EFECTUAR



1. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), reduce:
   $L = \sec A\sec C\,\text{sen}C\,\text{sen}A$

2. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), reduce:
   $L = \text{sen}C \cdot \text{sen}A$

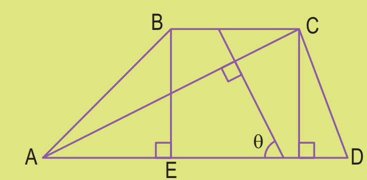
3. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°), reduce:
   $L(\sec^2 A - \cot^2 C)(\csc^2 C - \tan^2 A)$

4. En un triángulo rectángulo los lados menores miden 1 y $\sqrt{7}$, calcula la cosecante del menor ángulo agudo.

5. En un triángulo rectángulo los lados mayores miden 3 y $\sqrt{5}$, calcula el seno del menor ángulo agudo.

6. En un triángulo rectángulo un cateto es el doble del otro, se pide calcular la cosecante del mayor ángulo agudo.

7. La figura mostrada es un trapecio, calcula:
   $M = \sqrt{5}\,\text{sen}\theta\tan\theta$; (AE = BE = BC)



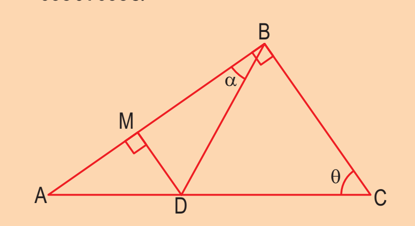
8. En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es 5/2 del producto de los catetos, halla el valor de la cotangente del menor de los ángulos agudos.

9. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 338 m. Si la tangente de uno de los ángulos agudos vale 2,4 m, ¿cuánto vale el cateto mayor?

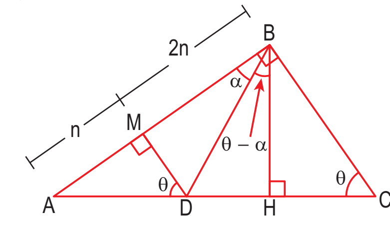
Problemas resueltos

1 Si en el gráfico: $2AM = MB$

Calcula: $E = \dfrac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos\theta \cdot \cos\alpha}$



Resolución:



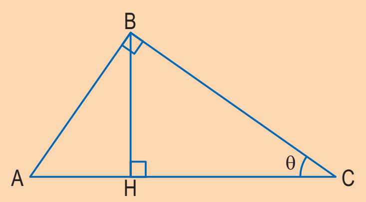
$BD = 2n\sec\alpha$

$BH = 3n\cos\theta$

$\Rightarrow \cos(\theta - \alpha) = \dfrac{BH}{BD} = \dfrac{3n\cos\theta}{2n\sec\alpha} = \dfrac{3}{2}\cos\theta \cdot \cos\alpha$

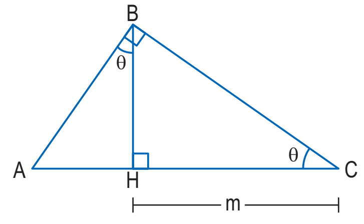
$\therefore E = \dfrac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos\theta \cdot \cos\alpha} = \dfrac{3}{2}$

2 Del gráfico, halla: $\dfrac{A_{\triangle AHB}}{A_{\triangle BHC}}$



Resolución:

Sea: $HC = m$



En el $\triangle BHC$: $BH = m\tan\theta$

En el $\triangle AHB$: $AH = BH\tan\theta$

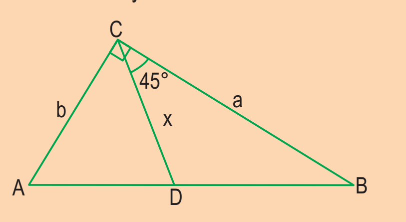
$AH = m\tan^2\theta$

$\Rightarrow A_{\triangle AHB} = \dfrac{(m\tan^2\theta)(m\tan\theta)}{2} = \dfrac{m^2\tan^3\theta}{2}$

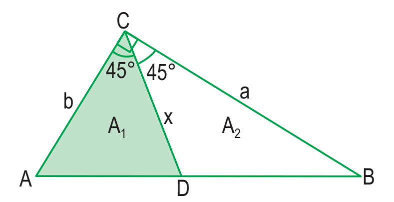
$A_{\triangle BHC} = \dfrac{m(m\tan\theta)}{2} = \dfrac{m^2\tan\theta}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{A_{\triangle AHB}}{A_{\triangle BHC}} = \dfrac{\frac{m^2\tan^3\theta}{2}}{\frac{m^2\tan\theta}{2}} = \tan^2\theta$

3 Halla x en función de a y b.



Resolución:



Por áreas:

$A_{\triangle(ACB)} = A_1 + A_2$

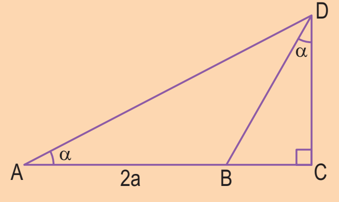
$\dfrac{a.b}{2} = \dfrac{b.x}{2}\text{sen}45° + \dfrac{a.x}{2}\text{sen}45°$

$\dfrac{a.b}{2} = \dfrac{b.x}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{a.x}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

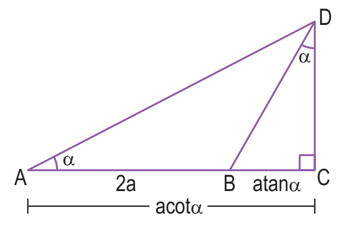
Reduciendo: $2ab = x\sqrt{2}(a + b)$

$\therefore x = \dfrac{a.b\sqrt{2}}{(a + b)}$

4 De la figura, halla $\tan\alpha$.



Resolución:



Del gráfico:

$a\cot\alpha = 2a + a\tan\alpha$

$\cot\alpha = 2 + \tan\alpha$

$\dfrac{1}{\tan\alpha} = 2 + \tan\alpha$

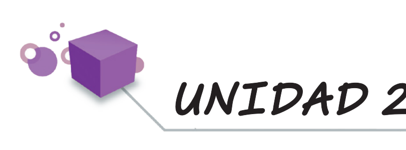
$\tan^2\alpha + 2\tan\alpha - 1 = 0$

$\tan\alpha = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$\tan\alpha = \sqrt{2} + 1 \;\vee\; \tan\alpha = -\sqrt{2} - 1$

Como α es un ángulo agudo: $\tan\alpha > 0$

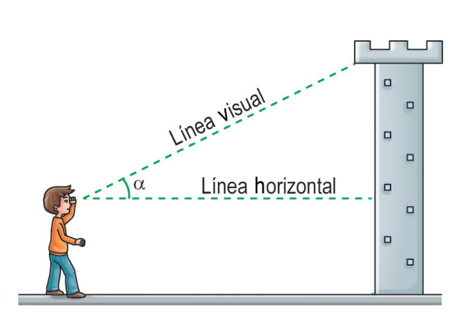
$\therefore \tan\alpha = \sqrt{2} + 1$

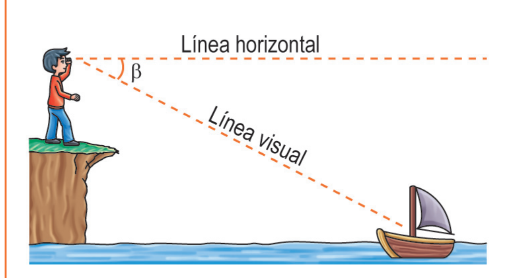
ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES

ÁNGULOS VERTICALES

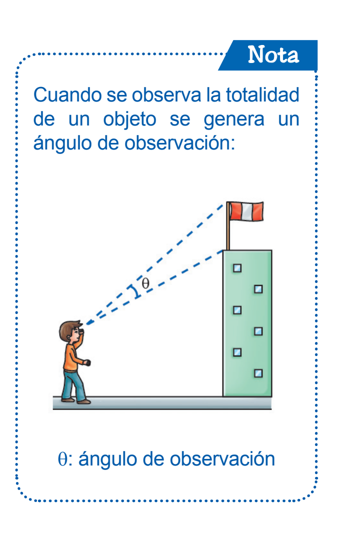
Son aquellos ángulos ubicados en un plano vertical que en la práctica, son formados por una línea visual (o línea de mira) y una línea horizontal, como resultado de haberse efectuado una observación. Estos ángulos se clasifican en ángulos de elevación y ángulos de depresión.



α: ángulo de elevación



β: ángulo de depresión

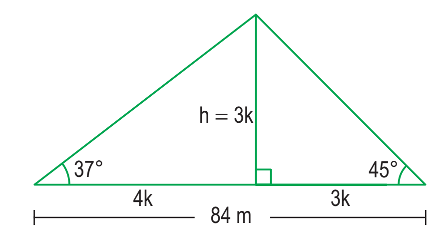


θ: ángulo de observación

Ejemplos:

1. Desde dos puntos separados 84 m, se observa la parte alta de un poste que se encuentra entre ellos con ángulos de elevación de 37° y 45°. Halla la altura del poste.

   Resolución:



Del gráfico:

$3k + 4k = 84$

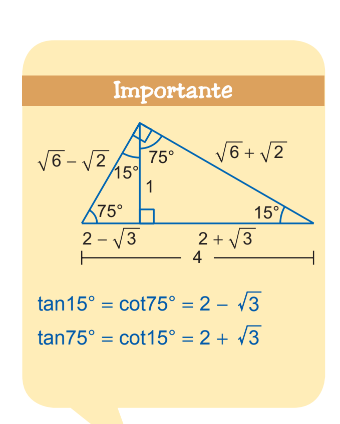
$7k = 84$

$k = 12$

Piden: $h = 3k$

$= 3(12)$

$= 36$ m

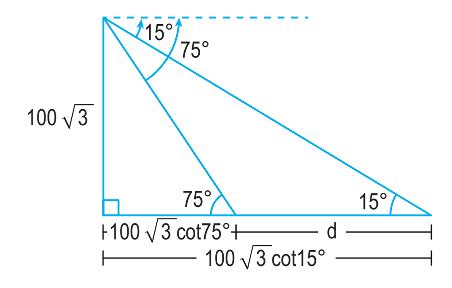


$\tan 15° = \cot 75° = 2 - \sqrt{3}$

$\tan 75° = \cot 15° = 2 + \sqrt{3}$

2. Desde un helicóptero que se encuentra a $100\sqrt{3}$ m sobre el nivel del mar, se observan dos botes cuyos ángulos de depresión son 15° y 75°. Halla la distancia que separa a los botes.

   Resolución:



Del gráfico:

$100\sqrt{3}\cot 75° + d = 100\sqrt{3}\cot 15°$

$d = 100\sqrt{3}(\cot 15° - \cot 75°)$

$d = 100\sqrt{3}\left(2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})\right)$

$d = 100\sqrt{3}(2\sqrt{3})$

$d = 600$ m



ÁNGULOS HORIZONTALES

Son aquellos ángulos ubicados en el plano horizontal, que en la práctica son determinados por el uso de la rosa Náutica.

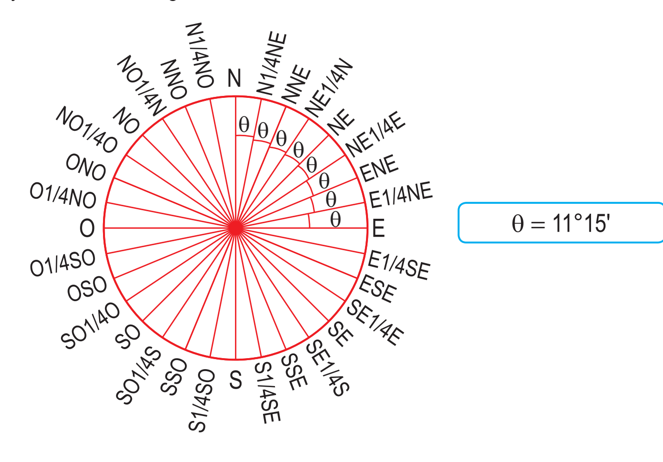
Observación

NE	< >	N45°E
NO	< >	N45°O
NNE	< >	N22°30'E
NNO	< >	N22°30'O
N1/4 NE	< >	N11°15'E
N1/4 NO	< >	N11°15'O



Rosa Náutica

Llamada también compás marino, es un instrumento de orientación que permite localizar un punto respecto de otro llamado referencia; haciendo uso de las llamadas direcciones o rumbos (32) y los puntos cardinales (N; S; E; O) formando entre dirección y dirección un ángulo de 11°15'.



Nota

El opuesto de una dirección dada se obtiene cambiando las direcciones que aparezcan por sus respectivos opuestos, sin cambiar el ángulo.

Dirección	Dirección opuesta
NαE	SαO
N1/4NE	S1/4SO
SO	NE
ENE	OSO

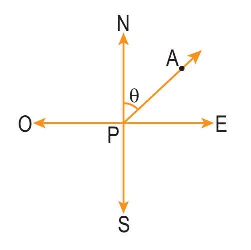


Rumbo

Es el ángulo agudo horizontal que forma la dirección de la persona u objeto con respecto al eje norte-sur, cuando esta se desvía hacia el este (E) u oeste(O).

Dirección

Es la línea recta sobre la cual se encuentra la persona u objeto con respecto a una rosa Náutica, quedando determinada dicha dirección por su rumbo.

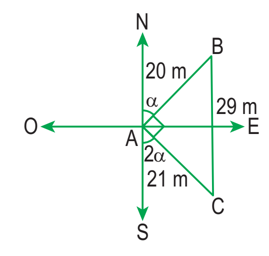


El rumbo de A con respecto a P es θ al este del norte.
La dirección de A con respecto a P es N θ E (norte θ este).

Ejemplos:

Dos autos parten desde un mismo punto A; el primero en la dirección NαE y el segundo con rumbo S2αE. Cuando el primero recorre 20 metros y el segundo 21 metros, la distancia que los separa es 29 m. Calcula α.

Resolución:



Notamos que el triángulo BAC es rectángulo, ya que se cumple el teorema de Pitágoras.
Luego, tenemos:

$$\alpha + 90° + 2\alpha = 180°$$
$$3\alpha + 90° = 180°$$
$$3\alpha = 90°$$
$$\alpha = 30°$$

EFECTUAR

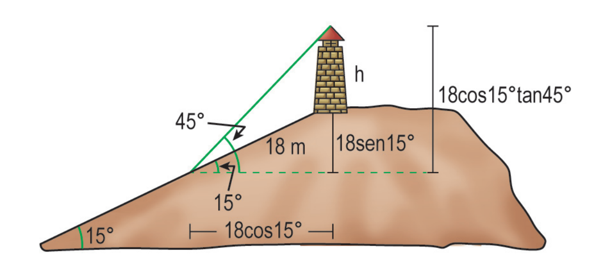


1. Desde un punto en tierra ubicada a 20m de un edificio, se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación de 26°, ¿cuál es la altura del edificio?
2. Desde lo alto de un edificio de 30 m de altura se ve un objeto en tierra con un ángulo de depresión de 38°, ¿a qué distancia de la base del edificio, se encuentra el objeto?
3. Desde un punto en tierra se divisa lo alto de una torre con un ángulo de elevación de 10°. Si nos acercamos 20 m, el ángulo de elevación se duplica. ¿Cuál es la altura de la torre?
4. Desde un punto en tierra ubicado a 40 m de un gran hotel, se divisa su parte más alta con un ángulo de elevación de 37°, ¿cuál es, aproximadamente, la altura del hotel?

Problemas resueltos

1 Un castillo se encuentra en la parte más alta de una colina que tiene una inclinación de 15° con respecto al plano horizontal. Desde un punto sobre la colina a 18 m del pie del castillo se observa su parte más alta con un ángulo de elevación de 45°. Halla la altura del castillo.

Resolución:



Se observa que:

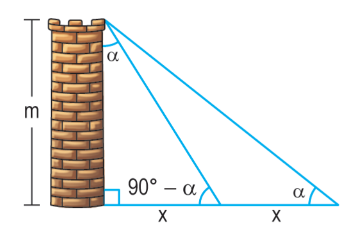
$h = 18\cos15°\tan45° - 18\text{sen}15°$

$h = 18\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]$

$\therefore \quad h = 9\sqrt{2}$ m

2 Desde un punto se observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación α; y desde el punto medio de la distancia que separa el pie de la torre y el punto, el ángulo de elevación es el complemento de α. Calcula la tangente del segundo ángulo.

Resolución:



Sea la altura de la torre: m

Del gráfico:

$\cot\alpha = \frac{2x}{m}$

$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha = \frac{m}{x}$

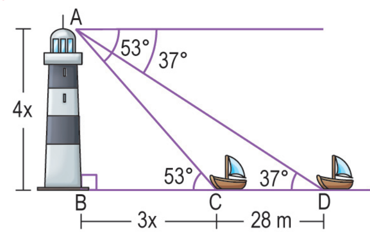
$\frac{2x}{m} = \frac{m}{x} \Rightarrow m = \sqrt{2}\,x$

Nos piden:

$\tan(90° - \alpha) = \frac{m}{x} = \frac{\sqrt{2}\,x}{x} = \sqrt{2}$

3 Desde lo alto de un faro se observa, a un mismo lado, dos barcos anclados, con ángulos de depresión de 53° y 37°. Si los barcos están separados una distancia igual a 28 m, ¿cuál es la altura del faro?

Resolución:



Sea la altura del faro: 4x

En el ◺ ABC (37°; 53°)

BC = 3x

En el ◺ ABD (37°; 53°)

$\tan 37° = \frac{4x}{3x+28}$

$\frac{3}{4} = \frac{4x}{3x+28}$

$\Rightarrow x = 12$

Nos piden:

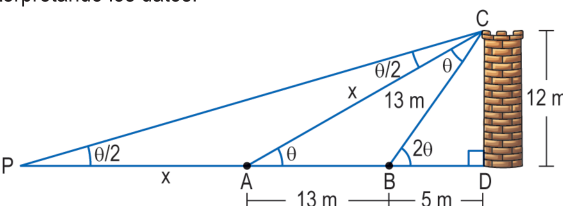
$4x = 4(12) = 48$ m

4 Karen observa la parte más alta de una torre de 12 m con un ángulo de elevación igual a θ. Si avanza 13 m lo observa con un ángulo de elevación igual a 2θ.

Calcula: $E = 2\cot\frac{\theta}{2} - \sqrt{13}$

Resolución:

Interpretando los datos:



Del gráfico: AB = BC = 13 m

Entonces, por T. de Pitágoras: BD = 5 m

Nos piden: $2\cot\frac{\theta}{2} - \sqrt{13}$

Trazamos $\overline{CP}$, de tal modo que: PA = AC = x

Por T. de Pitágoras:

$x^2 = 18^2 + 12^2 = 468$

$x = 6\sqrt{13}$

Entonces:

$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{6\sqrt{13}+18}{12}$

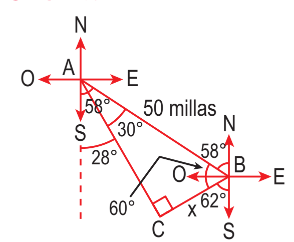
Reemplazamos:

$E = 2\left(\frac{6\sqrt{13}+18}{12}\right) - \sqrt{13}$

$\therefore \quad E = 3$

5 Dos ciudades A y B están separadas 50 millas una de la otra. La ciudad B está situada con respecto a A, 58° al este del sur. Una tercera ciudad C se ve desde B en la dirección 62° al oeste del sur. Calcula la distancia en millas de la ciudad B a la ciudad C.

Resolución:



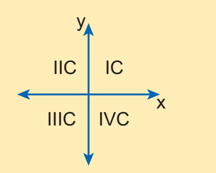
◺ACB es notable:

$\Rightarrow x = 25$ millas

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Recuerda

Los cuadrantes en el plano cartesiano se dividen así:

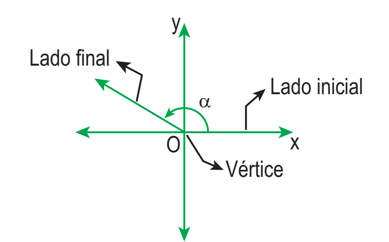




ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Todo ángulo trigonométrico dibujado en el plano cartesiano con su vértice en el origen de coordenadas, con su lado inicial en el eje positivo de las abscisas y su lado final en alguno de los cuatro cuadrantes es llamado ángulo en posición normal.

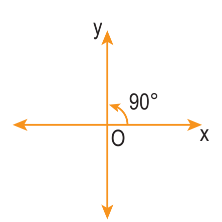
Observa el siguiente gráfico:

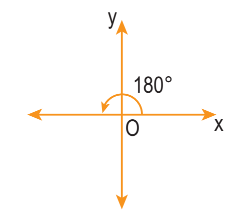


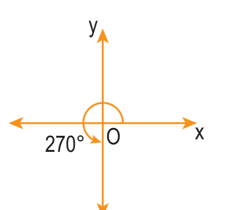
α: ángulo en posición normal

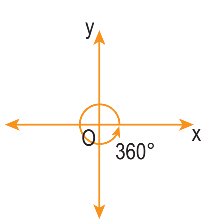
Como indicamos anteriormente, el lado final de un ángulo en posición normal puede pertenecer a alguno de los cuatro cuadrantes, pero también puede coincidir con alguno de los ejes coordenados. A este tipo de ángulos se les llama **ángulos cuadrantales**.

Los principales ángulos cuadrantales son:



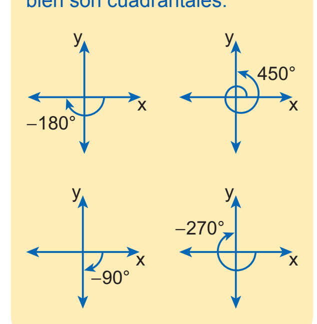






Atención

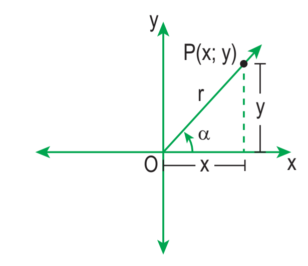
Los siguientes ángulos también son cuadrantales.



La medida de un ángulo cuadrantal es siempre un múltiplo de 90°, es decir:

$90° \cdot n$ ó $\frac{\pi}{2} \cdot n$; $n \in \mathbb{Z}$

Las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal son:



$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$



Recuerda

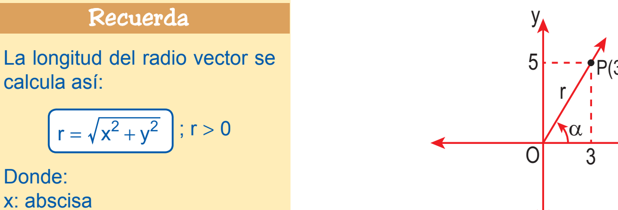
La longitud del radio vector se calcula así:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $r > 0$

Donde:
x: abscisa
y: ordenada
r: radio vector

Ejemplo:

Observa el siguiente gráfico y calcula las razones trigonométricas del ángulo α:



Resolución:

$r = \sqrt{(3)^2 + (5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

$\text{sen}\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \qquad \csc\alpha = \frac{\sqrt{34}}{5}$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34} \qquad \sec\alpha = \frac{\sqrt{34}}{3}$

$\tan\alpha = \frac{5}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{3}{5}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

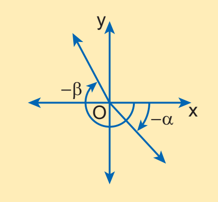
Anteriormente ya hemos visto la definición de un ángulo cuadrantal, en esta parte conoceremos las razones trigonométricas de cada uno de ellos.

RT / m∠	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	1	0	ND	1	ND
90°	1	0	ND	0	ND	1
180°	0	–1	0	ND	–1	ND
270°	–1	0	ND	0	ND	–1
360°	0	1	0	ND	1	ND

ND: no definido

Importante

Los ángulos negativos se forman cuando el ángulo gira en sentido horario.



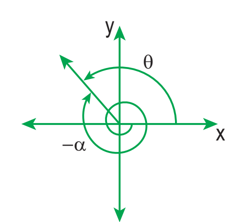


Observación

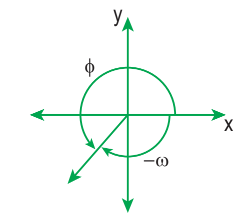
Los ángulos coterminales no necesariamente deben ser ángulos en posición normal.

ÁNGULOS COTERMINALES

Para que dos o más ángulos sean coterminales deben tener el mismo lado inicial, final y vértice.
Observa los siguientes gráficos:



$-\alpha$ y θ son ángulos coterminales



ϕ y $-\omega$ son ángulos coterminales

Las razones trigonométricas de ángulos coterminales son iguales. Tomando como ejemplo el gráfico de la izquierda tenemos:

$$\text{sen}(-\alpha) = \text{sen}\theta \qquad \csc(-\alpha) = \csc\theta$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\theta \qquad \sec(-\alpha) = \sec\theta$$
$$\tan(-\alpha) = \tan\theta \qquad \cot(-\alpha) = \cot\theta$$

La diferencia de dos ángulos coterminales es una cantidad exacta de vueltas, que se representa por:

$$360° \,.\, n\,;\ n \in \mathbb{Z}$$

De lo anterior se puede deducir que para hallar los ángulos coterminales de un ángulo solo se le debe sumar a este un número entero de vueltas, es decir: dado el ángulo θ en general sus ángulos coterminales serían de la siguiente forma:

$$\theta + 2\pi \,.\, n\,;\ n \in \mathbb{Z}$$

Recuerda

Los signos de las razones trigonométricas de cualquier ángulo dependen del cuadrante en que se encuentre el lado final. Observa el siguiente gráfico:

IIC: (+) Sen, Csc	IC: Todas RT son positivas
IIIC: (+) Tan, Cot	IVC: Cos, Sec (+)

Ejemplo:

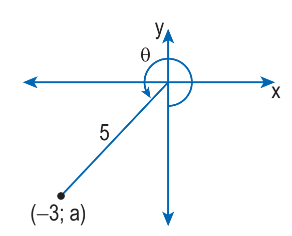
Si $\cos\theta = -0{,}6$ y $\tan\theta > 0$; halla:

$$H = \frac{\tan\theta + \text{sen}\theta}{\sec\theta}$$

Resolución:

$\cos\theta = -0{,}6 = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos\theta < 0$

$\Rightarrow \cos\theta < 0 \wedge \tan\theta > 0 \Rightarrow \theta \in \text{IIIC}$



Se cumple: $(-3)^2 + a^2 = 5^2$

$9 + a^2 = 25$

$a^2 = 16$

$(a < 0) \Rightarrow a = -4$

- $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$
- $\text{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$
- $\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$

Reemplazando en la expresión:

$$H = \frac{\left(\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)}{\left(-\frac{5}{3}\right)} = \frac{\frac{8}{15}}{-\frac{5}{3}} = -\frac{8}{25}$$



1 Si $\theta \in$ IIC y $\text{sen}\theta = \frac{8}{17}$, halla:

$E = \sec\theta - \tan\theta$

Resolución:

Se cumple:

$a^2 + 8^2 = 17^2$

$a^2 + 64 = 289$

$a^2 = 225$

$(a < 0) \Rightarrow a = -15$

Piden: $E = \sec\theta - \tan\theta$

$E = \left(\frac{17}{-15}\right) - \left(\frac{8}{-15}\right)$

$E = \frac{-17+8}{15} = \frac{-9}{15} = -\frac{3}{5}$

2 Si $\cos^2\theta = \frac{1}{9}$ y $\theta \in$ IIIC, calcula:

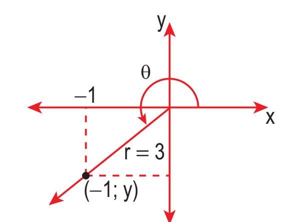
$B = \tan\theta + \cot\theta$

Resolución:

Del dato: $\cos\theta = \pm\frac{1}{3}$

Como $\theta \in$ IIIC, entonces el $\cos\theta$ es negativo, por lo tanto:

$\cos\theta = -\frac{1}{3}$



Luego: $r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 3^2 = (-1)^2 + y^2$

$9 = 1 + y^2$

$\Rightarrow y^2 = 8$

$y = \pm 2\sqrt{2}$

Del gráfico $y < 0$, entonces: $y = -2\sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}$

$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Reemplazamos:

$B = 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$

$\therefore B = \frac{9\sqrt{2}}{4}$

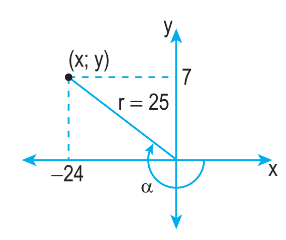
3 Se sabe que $\cos\alpha = -0{,}96$; $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$

Calcula: $M = \text{sen}\alpha(2\cot\alpha + 4)$

Resolución:

Del dato: $\cos\alpha = \frac{-96}{100} = \frac{-24}{25}$

Como $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi \Rightarrow \alpha \in$ IIC



$\text{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{7}{25}$

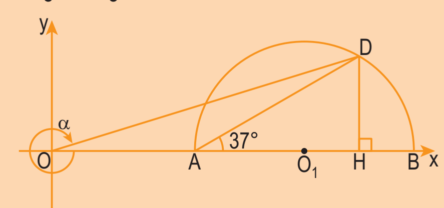
$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{-24}{7} = -\frac{24}{7}$

Reemplazando:

$M = \frac{7}{25}\left[2\left(-\frac{24}{7}\right) + 4\right]$

$M = \frac{7}{25}\left(-\frac{20}{7}\right) = -\frac{4}{5}$ $\qquad \therefore M = -\frac{4}{5}$

4 Del gráfico, calcula $\cot\alpha$; siendo O_1 centro de la semicircunferencia y además: $\frac{OA}{5} = \frac{BH}{3}$

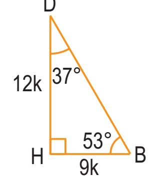


Resolución:

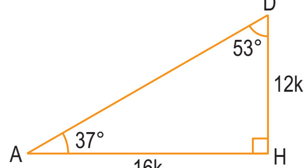
Por dato: $\frac{OA}{BH} = \frac{5k}{3k} = \frac{15k}{9k}$

Analizamos los siguientes triángulos:

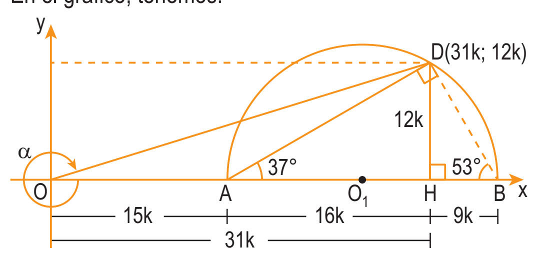
En el triángulo BHD:



En el triángulo AHD:



En el gráfico, tenemos:



Del gráfico:

DH = 31k (medida de la abscisa)

HD = 12k (medida de la ordenada)

Así encontramos un punto en el lado final del ángulo α:

D(31k; 12k)

Luego, nos piden calcular:

$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{31k}{12k} = \frac{31}{12}$

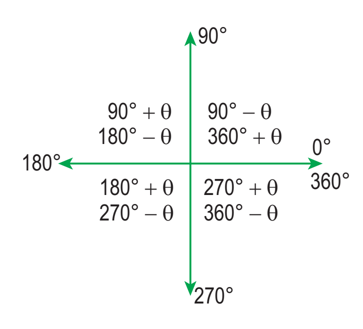
◆ REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

DEFINICIÓN

Es un procedimiento que permite calcular las razones trigonométricas de ángulos trigonométricos de cualquier magnitud relacionados con RT de ángulos del primer cuadrante. Estas relaciones se establecen debido a que las RT son periódicas, es decir, repiten sus valores en cierto intervalo o periodo.

1.er caso

Para ángulos menores que una vuelta:



$$RT(n \times 90° \pm \theta) = \begin{cases} (\pm)\ RT(\theta), \text{ si n: par} \\ (\pm)\ Co\text{-}RT(\theta), \text{ si n: impar} \end{cases}$$

Ejemplos:

Reduce al primer cuadrante:

1. $\text{sen}145° = \text{sen}(\underbrace{180° - 35°}_{\in \text{II C}})$
   $= \text{sen}(2 \times 90° - 35°)$
   $= \text{sen}35°$

2. $\tan 280° = \tan(\underbrace{270° + 10°}_{\in \text{IV C}})$
   $= \tan(3 \times 90° + 10°)$
   $= -\cot 10°$

3. $\sec\frac{17\pi}{10} = \sec\left(\underbrace{\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}}_{\in \text{IV C}}\right)$
   $= \csc\frac{\pi}{5}$

4. $\cot(\underbrace{\pi + \theta}_{\in \text{III C}}) = \cot\theta$

2.° caso

Para ángulos mayores de una vuelta:

$$RT(n \times 360° + \theta) = RT(\theta);\ n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

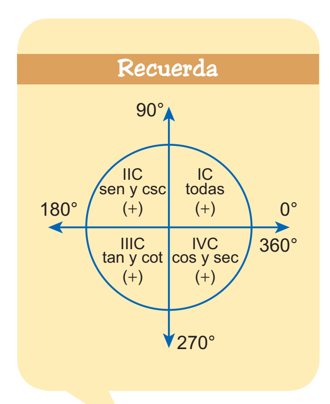
Reduce al primer cuadrante:

1. $\tan 600° = \tan(360° + 240°)$
   $= \tan 240°$
   $= \tan 60°$
   $= \sqrt{3}$

2. $\sec 3000° = \sec(8 \times 360° + 120°)$
   $= \sec 120°$
   $= -\sec 60°$
   $= -2$

3. $\text{sen}\frac{91\pi}{6} = \text{sen}\left(\frac{90\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$
   $= \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$
   $= -\text{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

4. $\tan\left(55\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \tan\left(26\pi + \frac{3\pi}{2} + \theta\right)$
   $= \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$
   $= -\cot\theta$



Atención

Al ángulo de la RT que se va a reducir se le resta un número entero de vueltas de tal manera que el ángulo que quede sea positivo y menor que una vuelta y luego se procede como en el 1.er paso.

Ejemplo:
$\cos 750° = \cos(2 \times 360 + 30°)$
$= \cos 30°$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$



3.er caso

Para ángulos negativos:

$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

Ejemplos:
Halla el valor de las siguientes RT:

1. $\text{sen}(-690°) = -\text{sen}690°$
$= -\text{sen}(360 \times 1 + 330°)$
$= -\text{sen}330°$
$= -\text{sen}(4 \times 90° - 30°)$
$= -(-\text{sen}30°)$
$= \dfrac{1}{2}$

2. $\sec(-585°) = \sec585°$
$= \sec(360 \times 1 + 225°)$
$= \sec225°$
$= \sec(3 \times 90° - 45°)$
$= -\csc45°$
$= -\sqrt{2}$

3. $\cot(-2782°) = -\cot2782°$
$= -\cot(360° \times 7 + 262°)$
$= -\cot262°$
$= -\cot(2 \times 90° + 82°)$
$= -\cot82°$
$= -\dfrac{1}{7}$

4. $\cos(-1965°) = \cos1965°$
$= \cos(360° \times 5 + 165°)$
$= \cos165°$
$= \cos(90° + 75°)$
$= -\text{sen}75°$
$= -\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

Nota

1. $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}[-(\beta - \alpha)]$
$\text{sen}(\alpha - \beta) = -\text{sen}(\beta - \alpha)$
Análogamente se cumple para:
$\tan(\alpha - \beta)$, $\cot(\alpha - \beta)$ y $\csc(\alpha - \beta)$

2. $\cos(\alpha - \beta) = \cos[-(\beta - \alpha)]$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha)$
Análogamente se cumple para: $\sec(\alpha - \beta)$

Propiedades

1. Si: $\alpha + \beta = 90°$	2. Si: $\alpha + \beta = 180°$	3. Si: $\alpha + \beta = 270°$	4. Si: $\alpha + \beta = 360°$
$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \cos\beta$	$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \text{sen}\beta$	$\Rightarrow \text{sen}\alpha = -\cos\beta$	$\Rightarrow \text{sen}\alpha = -\text{sen}\beta$
$\tan\alpha = \cot\beta$	$\cos\alpha = -\cos\beta$	$\tan\alpha = \cot\beta$	$\cos\alpha = \cos\beta$
$\sec\alpha = \csc\beta$	$\tan\alpha = -\tan\beta$	$\sec\alpha = -\csc\beta$	$\tan\alpha = -\tan\beta$



Ejemplos de aplicación:

1. Calcula M, si:
$M = \tan\dfrac{\pi}{12} + \tan\dfrac{5\pi}{12} - \tan\dfrac{7\pi}{12} - \tan\dfrac{11\pi}{12}$

Resolución:

$\tan\dfrac{7\pi}{12} = \tan\left(\pi - \dfrac{5\pi}{12}\right) = -\tan\dfrac{5\pi}{12}$

$\tan\dfrac{11\pi}{12} = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{12}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{12}$

Reemplazamos:

$M = \tan\dfrac{\pi}{12} + \tan\dfrac{5\pi}{12} - \left(-\tan\dfrac{5\pi}{12}\right) - \left(-\tan\dfrac{\pi}{12}\right)$

$M = \tan\dfrac{\pi}{12} + \tan\dfrac{5\pi}{12} + \tan\dfrac{5\pi}{12} + \tan\dfrac{\pi}{12}$

$M = 2\left[\tan\dfrac{\pi}{12} + \tan\dfrac{5\pi}{12}\right]$

Pero: $\tan\dfrac{\pi}{12} = \tan15° = 2 - \sqrt{3}$

$\tan\dfrac{5\pi}{12} = \tan75° = 2 + \sqrt{3}$

Luego: $M = 2[2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}]$
$\therefore M = 8$

2. Halla el valor de β del siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas:
$\text{sen}(\text{sen}^2\alpha) + \text{sen}(\pi + \text{sen}\beta) = 0$ ...(I)
$\text{sen}(\cos^2\alpha) + \cos\dfrac{1}{2}(\pi + 2\text{sen}\beta) = 0$ ...(II)

Resolución:

De la expresión (I) tenemos:
$\text{sen}(\text{sen}^2\alpha) - \text{sen}(\text{sen}\beta) = 0$

$\text{sen}^2\alpha = \text{sen}\beta$ ...(a)

De la expresión (II) tenemos:
$\text{sen}(\cos^2\alpha) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \text{sen}\beta\right)$

$\cos^2\alpha + \dfrac{\pi}{2} - \text{sen}\beta = 90°$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \text{sen}\beta$ ...(b)

Sumamos (a) y (b):
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \text{sen}\beta + \text{sen}\beta$
$1 = 2\text{sen}\beta$

$\Rightarrow \text{sen}\beta = \dfrac{1}{2} = \text{sen}30°$ $\quad\therefore \beta = 30°$

Problemas resueltos

1 Calcula: $P = \dfrac{\text{sen}150°\sec300° - \tan^5 135°}{\tan315° + \cos240°}$

Resolución:

$\text{sen}150° = \text{sen}(180° - 30°) = +\text{sen}30° = \frac{1}{2}$

$\sec300° = \sec(360° - 60°) = +\sec60° = 2$

$\tan135° = \tan(180° - 45°) = -\tan45° = -1$

$\tan315° = \tan(360° - 45°) = -\tan45° = -1$

$\cos240° = \cos(180° + 60°) = -\cos60° = -\frac{1}{2}$

Reemplazando:

$$P = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 - (-1)^5}{-1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow P = \frac{1+1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

2 Calcula: $L = \dfrac{\text{sen}480°\cos150°\tan930°}{\cot240°\sec660°\csc330°}$

Resolución:

$$L = \frac{\text{sen}(360°+120°)\cos(180° - 30°)\tan(2 \times 360° + 210°)}{\cot(180° + 60°)\sec(360° + 300°)\csc(360° - 30°)}$$

$$L = \frac{-\text{sen}120°\cos30°\tan210°}{-\cot60°\sec300°\csc30°}$$

$$L = \frac{\text{sen}(180° - 60°)\cos30°\tan(180° + 30°)}{\cot60°\sec(270° + 30°)\csc30°}$$

$$L = \frac{\text{sen}60°\cos30°\tan30°}{\cot60°\csc30°\csc30°} \Rightarrow L = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(2)(2)} = \frac{3}{16}$$

3 Calcula el valor de la expresión:

$$A = \frac{\text{sen}\frac{5\pi}{4}\tan\frac{2\pi}{3}\csc\frac{7\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{3}\cot\frac{5\pi}{4}\sec\frac{11\pi}{6}}$$

Resolución:

Descomponemos los ángulos:

$$A = \frac{\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\csc\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\sec\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$A = \frac{\left(-\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)\left(-\tan\frac{\pi}{3}\right)\left(-\csc\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\cot\frac{\pi}{4}\right)\left(\sec\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$A = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-\sqrt{3})(-2)}{\left(\frac{1}{2}\right)(1)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{-\sqrt{2}.\sqrt{3}.2.2.\sqrt{3}}{2.2} = -3\sqrt{2}$$

$\therefore A = -3\sqrt{2}$

4 Reduce: $R = \text{sen}(555...25\frac{\pi}{2} + \alpha)$

Resolución:

$555...25 = \overset{\circ}{4} + 25 = \overset{\circ}{4} + 1$

$R = \text{sen}((\overset{\circ}{4} + 1)\frac{\pi}{2} + \alpha)$

$R = \text{sen}(\frac{\overset{\circ}{4}\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha)$

$R = \text{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

$\therefore R = \cos\alpha$

5 Calcula: $E = \cos\frac{635\pi}{6}\text{sen}\frac{427\pi}{4}\tan\frac{907\pi}{3}$

Resolución:

$$E = \cos\left(106\pi - \frac{\pi}{6}\right)\text{sen}\left(107\pi - \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(302\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$E = \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)$$

$$E = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}}{2\,.\,2} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$\therefore\ E = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$

6 Siendo A y B ángulos complementarios, simplifica:

$$P = \frac{\text{sen}(2A + 3B)}{\cos(3A + 2B)} - \frac{\tan(A - B)}{\tan(5A + 3B)}$$

Resolución:

Por dato: $A + B = 90° \Rightarrow A = 90° - B$

Ordenamos la expresión:

$$P = \frac{\text{sen}[2(A + B) + B]}{\cos[2(A + B) + A]} - \frac{\tan(90° - 2B)}{\tan[3(A + B) + 2A]}$$

$$P = \frac{\text{sen}(180° + B)}{\cos(180° + A)} - \frac{\cot(2B)}{\tan(270° + 2A)}$$

$$P = \frac{-\text{sen}B}{-\cos A} - \frac{\cot 2B}{-\cot 2A} \Rightarrow P = \frac{\text{sen}B}{\cos A} + \frac{\cot 2B}{\cot 2A}$$

Tenemos que: $A + B = 90° \Rightarrow \text{sen}B = \cos A$

$2A + 2B = 180° \Rightarrow \cot 2B = -\cot 2A$

Reemplazamos en la expresión:

$$P = \frac{\text{sen}B}{\text{sen}B} + \frac{\cot 2B}{-\cot 2B} = 1 - 1 = 0$$

7 Se define: $2f(x) + f(-x) = \text{sen}x;\ x \in \mathbb{R}$.

Calcula: $A = [f(\frac{\pi}{2} + x) + f(\pi + x)]^2 + 2\text{sen}x\cos x$

Resolución:

Del dato: $2f(x) + f(-x) = \text{sen}x$ ...(1)

Reemplazando x por $-x$ en (1):

$2f(-x) + f(x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}x$ ...(2)

Sumando (1) y (2): $3f(x) + 3f(-x) = 0$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

Reemplazando $f(-x) = -f(x)$ en (1):

$2f(x) - f(x) = \text{sen}x \Rightarrow f(x) = \text{sen}x$

$A = [\text{sen}(\frac{\pi}{2} + x) + \text{sen}(\pi + x)]^2 + 2\text{sen}x\cos x$

$A = [\cos x - \text{sen}x]^2 + 2\text{sen}x\cos x$

$A = \cos^2 x - 2\cos x\,\text{sen}x + \text{sen}^2 x + 2\text{sen}x\cos x$

$\therefore A = 1$

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Nota

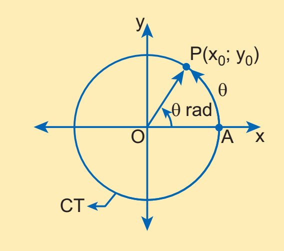
La ecuación de la circunferencia trigonométrica es:

$$x^2 + y^2 = 1$$



Importante

Un arco dirigido en posición normal es aquel que se genera a partir del origen de arcos (A) y su extremo final es cualquier punto sobre la CT.



Además:
$(x_0; y_0) = (\cos\theta; \text{sen}\theta)$

Nota

Variación analítica del seno

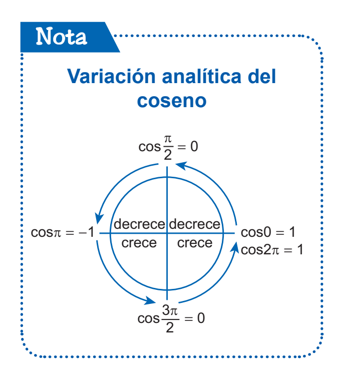
$\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$

$\text{sen}\pi = 0$ | decrece | crece | $\text{sen}0 = 0$
decrece | crece | $\text{sen}2\pi = 0$

$\text{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$

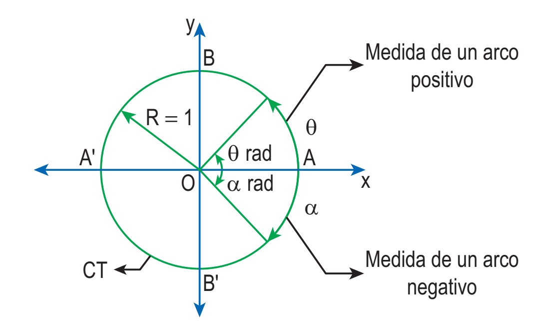
Nota

Variación analítica del coseno



DEFINICIÓN

Es aquella circunferencia cuyo centro coincide con el origen de coordenadas rectangulares y cuyo radio es igual a la unidad.



Donde:

A(1; 0): origen de arcos

B(0; 1): origen de complementos de arcos

A'(−1; 0): origen de suplementos de arcos

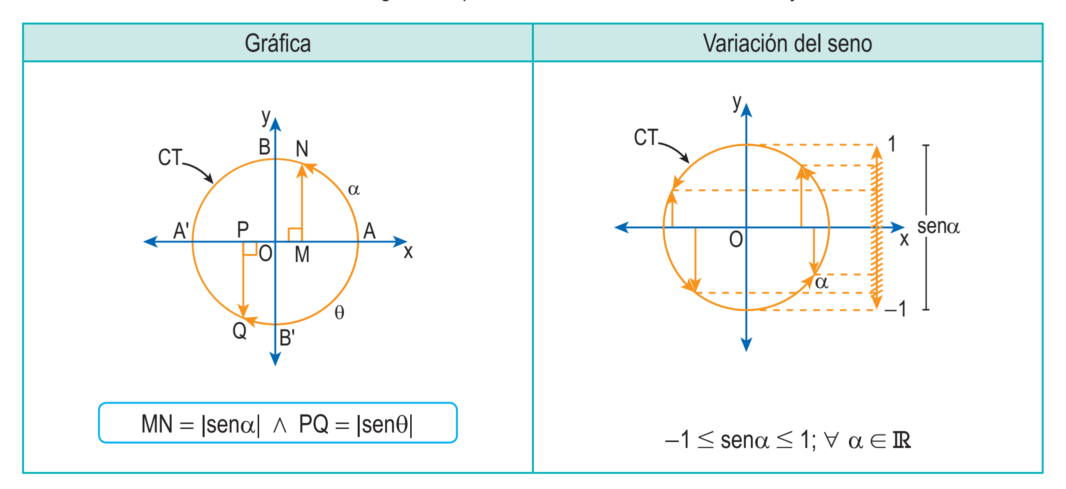
O(0; 0): origen de coordenadas

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Son segmentos dirigidos, de medidas positiva y negativa, los cuales nos representan en la circunferencia trigonométrica el valor numérico de una razón trigonométrica de un ángulo o número.

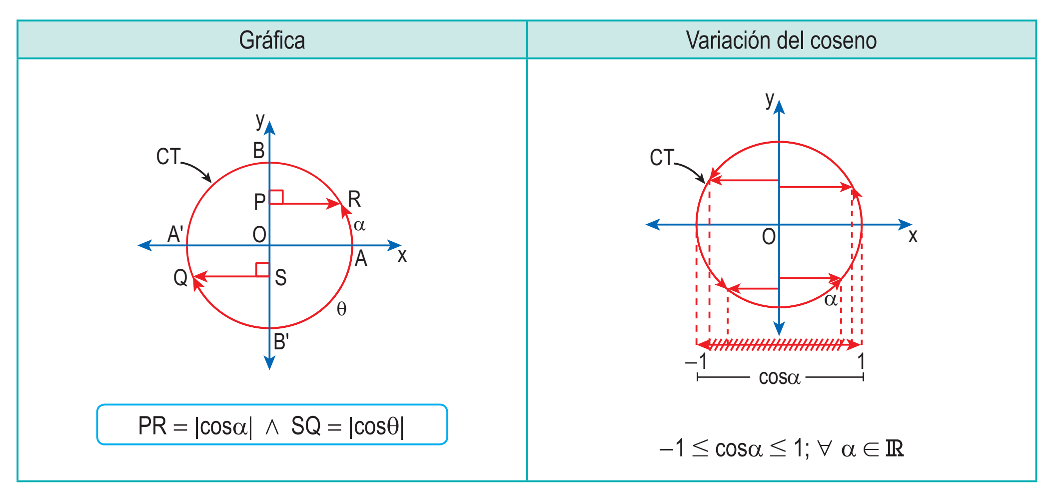
I. Línea trigonométrica seno

El seno de un arco es la medida del segmento que une el extremo del arco con el eje de las abscisas.



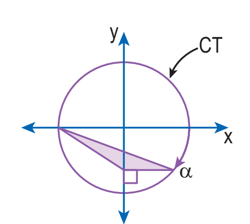
II. Línea trigonométrica coseno

El coseno de un arco se determina por la medida del segmento horizontal que une el extremo de un arco con el eje de las ordenadas.

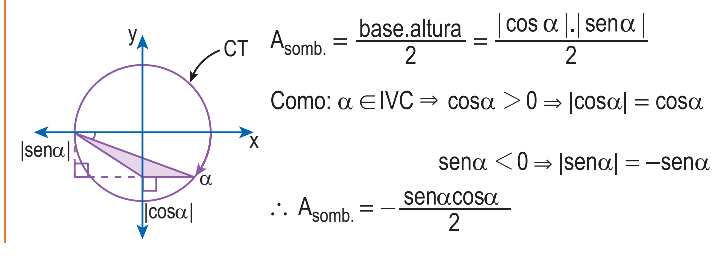


Ejemplo:

Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:



$A_{somb.} = \dfrac{base.altura}{2} = \dfrac{|\cos\alpha|.|sen\alpha|}{2}$

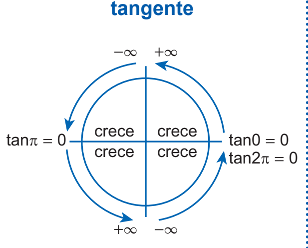
Como: $\alpha \in IVC \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow |\cos\alpha| = \cos\alpha$

$sen\alpha < 0 \Rightarrow |sen\alpha| = -sen\alpha$

$\therefore A_{somb.} = -\dfrac{sen\alpha\cos\alpha}{2}$

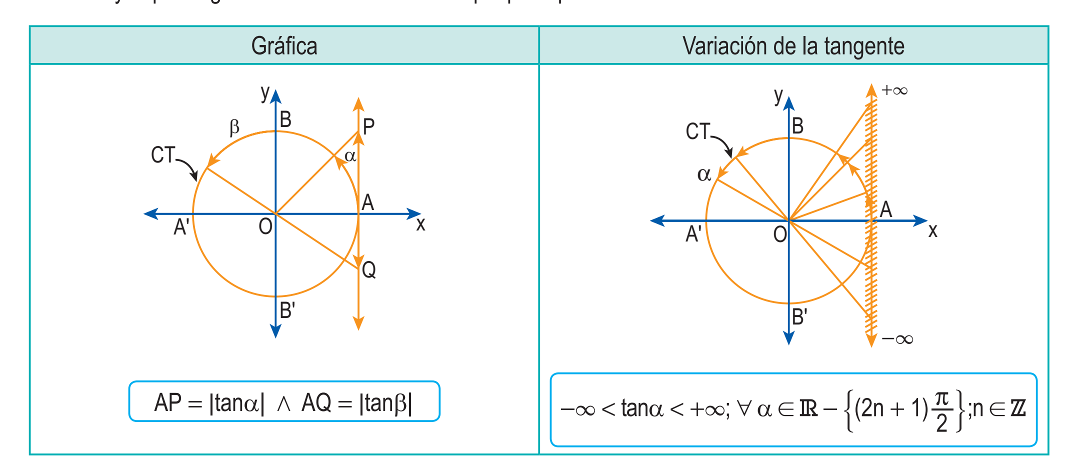
Nota





III. Línea trigonométrica tangente

La tangente de un arco es la ordenada del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de arcos y la prolongación del radio o diámetro que pasa por el extremo del arco.

Gráfica	Variación de la tangente
	
$AP = \|\tan\alpha\| \wedge AQ = \|\tan\beta\|$	$-\infty < \tan\alpha < +\infty;\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}; n \in \mathbb{Z}$

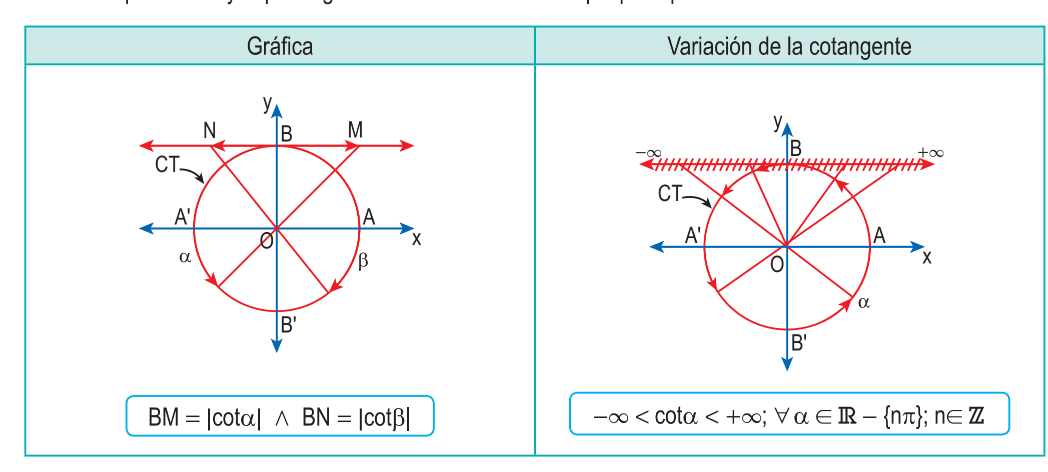
Observación

La tangente no está definida para los arcos cuyo extremo está en B o B', es decir, no se define para todo arco de la forma:

$(2n+1)\dfrac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$

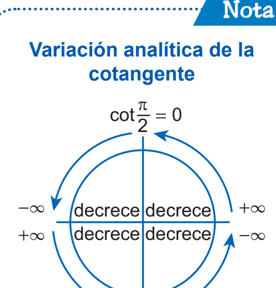
IV. Línea trigonométrica cotangente

La cotangente de un arco es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de los complementos y la prolongación del radio o diámetro que pasa por el extremo del arco.

Gráfica	Variación de la cotangente
	
$BM = \|\cot\alpha\| \wedge BN = \|\cot\beta\|$	$-\infty < \cot\alpha < +\infty;\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$

Nota

Variación analítica de la cotangente

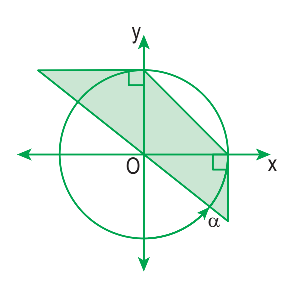


Observación

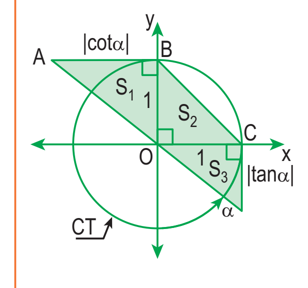
La cotangente no se define para los arcos cuyo extremo coincide con A o A', es decir, no está determinada para los arcos de la forma: $n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo:

En la CT mostrada, calcula el área sombreada.



Resolución:



Por definición:

$AB = |\cot\alpha| \wedge CD = |\tan\alpha|$

Del gráfico:

$A_{somb.} = S_1 + S_2 + S_3$

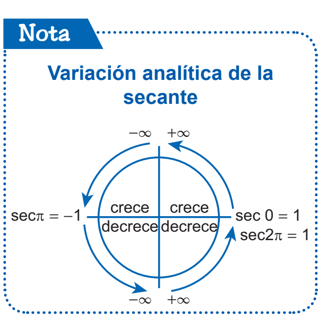
$A_{somb.} = \dfrac{1.|\cot\alpha|}{2} + \dfrac{1.1}{2} + \dfrac{1.|\tan\alpha|}{2}$

$A_{somb.} = \dfrac{1}{2}(1 + \underbrace{|\tan\alpha|}_{(-)} + \underbrace{|\cot\alpha|}_{(-)})$

$\therefore A_{somb.} = 0{,}5(1 - \tan\alpha - \cot\alpha)$

Nota

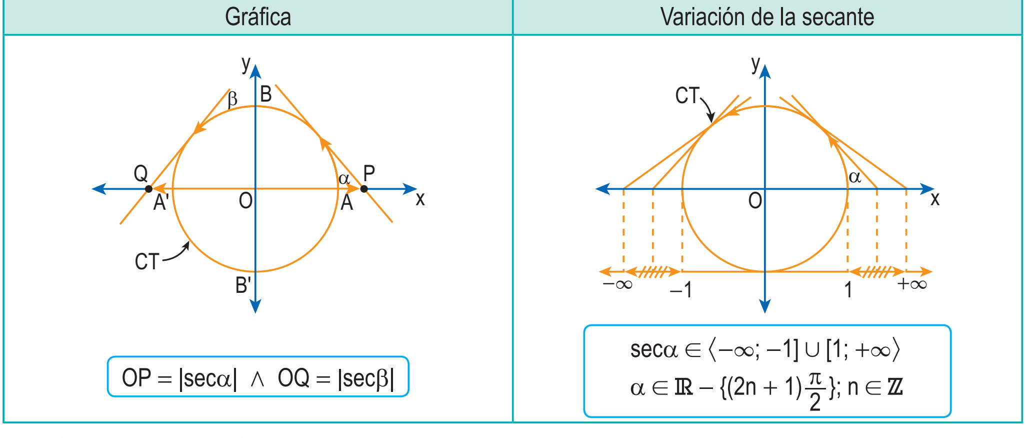
Variación analítica de la secante



V. Línea trigonométrica secante

La secante de un arco es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje x.

Gráfica	Variación de la secante
$OP = \|\sec\alpha\| \wedge OQ = \|\sec\beta\|$	$\sec\alpha \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$ $\alpha \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}\}; n \in \mathbb{Z}$



Observación

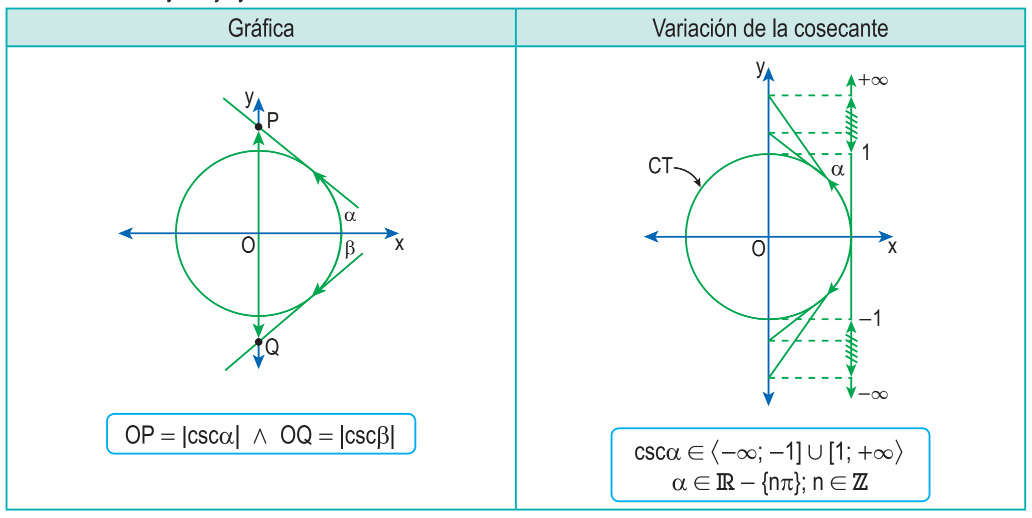
La secante no se define para los arcos cuyo extremo coincide con B' y B; es decir, no está determinada para los arcos de la forma: $(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$.



VI. Línea trigonométrica cosecante

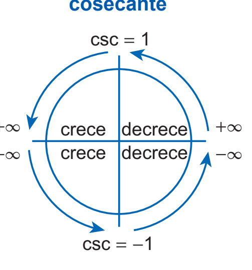
La cosecante de un arco es la ordenada del punto de intersección entre la línea tangente que pasa por el extremo del arco y el eje y.

Gráfica	Variación de la cosecante
$OP = \|\csc\alpha\| \wedge OQ = \|\csc\beta\|$	$\csc\alpha \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$ $\alpha \in \mathbb{R} - \{n\pi\}; n \in \mathbb{Z}$



Nota

Variación analítica de la cosecante



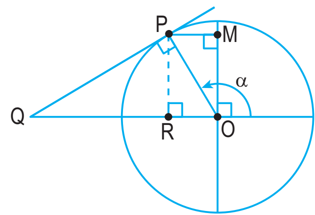
Observación

La cosecante no se define para los arcos cuyos extremos coinciden con A o A', es decir, la cosecante no está determinada para los arcos de la forma: $(n\pi)$; $n \in \mathbb{Z}$



Ejemplos:

1. En la figura adjunta se tiene una CT. Calcula el área de la región trapecial OMPQ.



Resolución:

$$S_{\square OMPQ} = \frac{(QO + PM)(RP)}{2}$$

Observa que:

$MP = |\cos\alpha| \Rightarrow PM = -\cos\alpha$

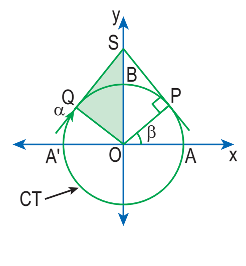
$OQ = |\sec\alpha| \Rightarrow QO = -\sec\alpha$

$RP = |\operatorname{sen}\alpha| \Rightarrow PR = \operatorname{sen}\alpha$

$$S_{\square} = \frac{(-\sec\alpha - \cos\alpha)}{2}.\operatorname{sen}\alpha$$

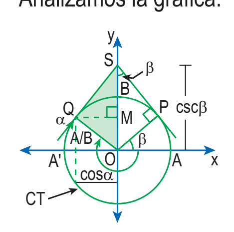
$$\therefore S_{\square} = -\frac{(\sec\alpha + \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha}{2}$$

2. Halla el área de la siguiente región sombreada.



Resolución:

Analizamos la gráfica:



En la CT se observa que la línea OS representa la cscβ, mientras que QM representa el cosα, entonces:

$OS = \underbrace{|\csc\beta|}_{(+)} = \csc\beta$

$QM = \underbrace{|\cos\alpha|}_{(-)} = -\cos\alpha$

Luego: $S_{\Delta OQS} = \dfrac{(OS)(QM)}{2}$

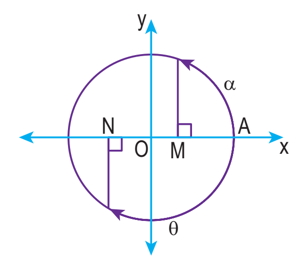
$$S_{\Delta OQS} = \frac{(\csc\beta)(-\cos\alpha)}{2}$$

$$\therefore S_{\Delta OQS} = -\frac{1}{2}\csc\beta\cos\alpha$$

LÍNEAS AUXILIARES

Senoverso (o verso)

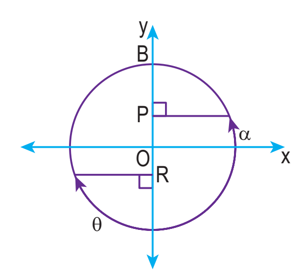
El verso de un arco es el segmento dirigido en el eje x que parte del punto cuya coordenada es el coseno de dicho arco hacia el origen de arcos.



Del gráfico:
$MA = \text{vers}\alpha \Rightarrow \text{vers}\alpha = 1 - \cos\alpha$
$NA = \text{vers}\theta \Rightarrow \text{vers}\theta = 1 - \cos\theta$

Cosenoverso (o coverso)

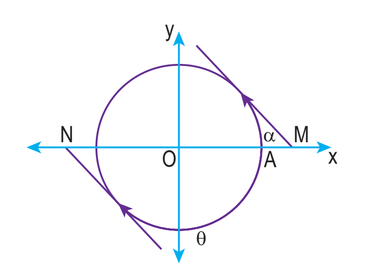
El coverso de un arco es al segmento dirigido en el eje y que parte del punto cuya coordenada es el seno de dicho arco hacia el origen de complementos.



Del gráfico:
$PB = \text{cov}\alpha \Rightarrow \text{cov}\alpha = 1 - \text{sen}\alpha$
$RB = \text{cov}\theta \Rightarrow \text{cov}\theta = 1 - \text{sen}\theta$

Exsecante (θ external)

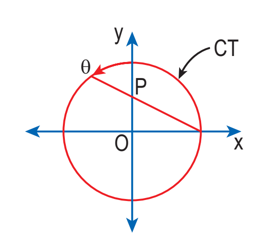
La exsecante de un arco es el segmento dirigido en el eje x que parte del origen de arcos hacia el punto cuya coordenada es la secante de dicho arco.



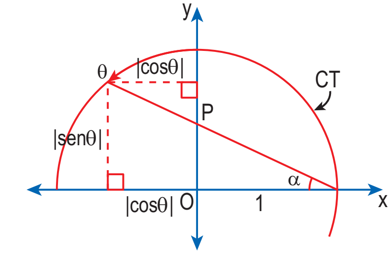
Del gráfico:
$AM = \text{exsec}\alpha \Rightarrow \text{exsec}\alpha = \sec\alpha - 1$
$AN = \text{exsec}\theta \Rightarrow \text{exsec}\theta = \sec\theta - 1$


Ejemplo:

De la figura, calcula OP en términos de θ.




Resolución:



Del gráfico:

$$\tan\alpha = \frac{OP}{1} = \frac{|\text{sen}\theta|}{|\cos\theta| + 1}$$

$$\Rightarrow OP = \frac{|\text{sen}\theta|}{1 + |\cos\theta|}$$

Como: $\theta \in IIC \Rightarrow \text{sen}\theta > 0 \Rightarrow |\text{sen}\theta| = \text{sen}\theta$
$\cos\theta < 0 \Rightarrow |\cos\theta| = -\cos\theta$

Reemplazando tenemos:

$$OP = \frac{\text{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = \frac{\text{sen}\theta}{\text{vers}\theta}$$

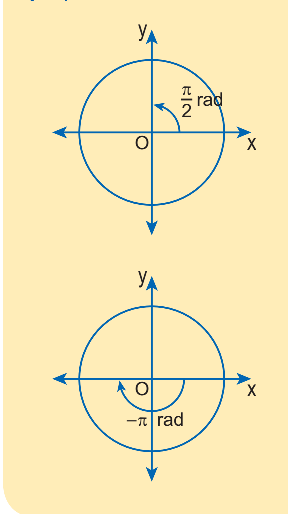
$$\therefore OP = \frac{\text{sen}\theta}{\text{vers}\theta}$$

Importante

Arcos cuadrantales

Son aquellos arcos en posición normal, cuyo extremo coincide con alguno de los puntos de intersección de dos ejes con la CT.


Ejemplo:





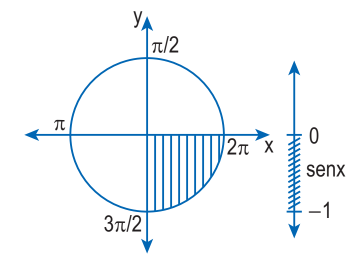
Problemas resueltos

1 Si: $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ y además $\text{sen}^2x = \frac{n}{3} - 5$,

calcula el menor valor entero de n.

Resolución:

Como x se encuentra limitado, analicemos los valores que puede tomar en la CT.



Entonces:

$-1 \leq \text{sen}x \leq 0$

$1 \geq \text{sen}^2x \geq 0$

$1 \geq \frac{n}{3} - 5 \geq 0 \Rightarrow 6 \geq \frac{n}{3} \geq 5$

$18 \geq n \geq 15$

$\therefore\ n_{mín.} = 15$

2 A partir de las siguientes condiciones:

$\text{sen}\beta > \tan\beta$ ... (1)

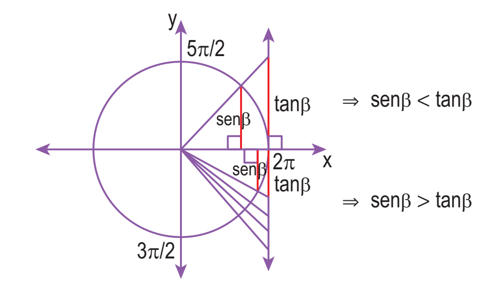
$\frac{3\pi}{2} < \beta < 5\frac{\pi}{2}$ ... (2)

halla los valores de la siguiente expresión:

$P = 1 - \frac{2}{\text{sen}^2\beta + 2}$

Resolución:

Analicemos las dos condiciones en la CT:



Entonces:

$\frac{3\pi}{2} < \beta \leq 2\pi$

$-1 < \text{sen}\beta \leq 0$

$1 > \text{sen}^2\beta \geq 0$

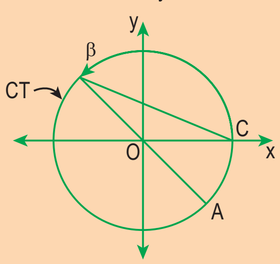
$3 > \text{sen}^2\beta + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{\text{sen}^2\beta + 2} \leq \frac{1}{2}$

$-\frac{2}{3} > \frac{-2}{\text{sen}^2\beta + 2} \geq -1$

$\frac{1}{3} > 1 - \frac{2}{\text{sen}^2\beta + 2} \geq 0$

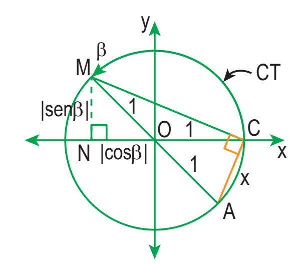
$\therefore\ P \in \left[0; \frac{1}{3}\right\rangle$

3 En la CT, halla la distancia entre A y C en términos de β.



Resolución:

Graficamos la CT:



Luego, en el ⊿ MNC:

$(MN)^2 + (NC)^2 = (MC)^2$

$\text{sen}^2\beta + (1 + |\cos\beta|)^2 = (MC)^2$

$\text{sen}^2\beta + (1 - \cos\beta)^2 = (MC)^2$ ...(I)

En el ⊿ MCA:

$(MC)^2 + (CA)^2 = (AM)^2$ ...(II)

(I) en (II):

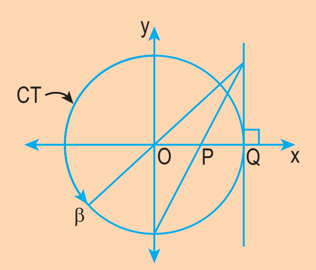
$\text{sen}^2\beta + (1 - \cos\beta)^2 + (CA)^2 = (AM)^2$

$\text{sen}^2\beta + 1 - 2\cos\beta + \cos^2\beta + x^2 = (2)^2$

$2 - 2\cos\beta + x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 + 2\cos\beta$

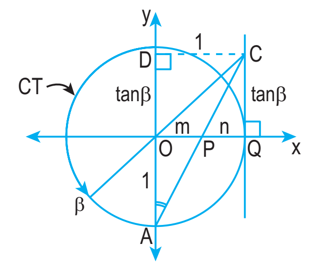
$\therefore\ x = \sqrt{2 + 2\cos\beta}$

4 De la CT, halla PQ en términos de β.



Resolución:

Del gráfico, tenemos:



$m + n = 1 \Rightarrow n = 1 - m$ ...(I)

En el $\triangle$ADC:

$\frac{m}{1} = \frac{1}{\tan\beta + 1} \Rightarrow m = \frac{1}{\tan\beta + 1}$ ...(II)

(II) en (I):

$n = 1 - \frac{1}{\tan\beta + 1}$

$n = \frac{\tan\beta + 1 - 1}{\tan\beta + 1} \Rightarrow n = \frac{\tan\beta}{\tan\beta + 1}$

5 Calcula el máximo valor de:

$R = \frac{2\text{sen}2x + 3}{6} + \frac{\cos 2x + 2}{3}$

Resolución:

Si: $R = \underbrace{\frac{2\text{sen}2x + 3}{6}}_{A} + \underbrace{\frac{\cos 2x + 2}{3}}_{B}$

$R = A + B$

En A, sabemos que: $-1 \leq \text{sen}2x \leq 1$

$-2 \leq 2\text{sen}2x \leq 2$

$1 \leq 2\text{sen}2x + 3 \leq 5$

$1/6 \leq \frac{2\text{sen}2x + 3}{6} \leq 5/6$

$1/6 \leq A \leq 5/6$

En B, sabemos que:

$-1 \leq \cos 2x \leq 1$

$1 \leq \cos 2x + 2 \leq 3$

$\frac{1}{3} \leq \frac{\cos 2x + 2}{3} \leq 1$

$\frac{1}{3} \leq B \leq 1$

$\frac{1}{6} \leq A \leq \frac{5}{6}$

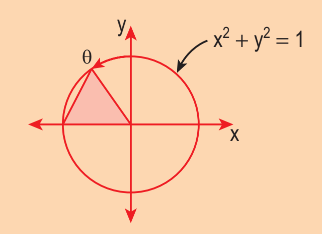
$\frac{1}{3} \leq B \leq 1$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \leq A + B \leq \frac{5}{6} + 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq A + B \leq \frac{11}{6}$

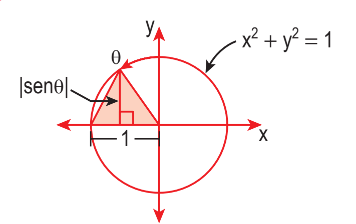
$\frac{1}{2} \leq R \leq \frac{11}{6}$

$\therefore R_{máx.} = 11/6$

6 Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:



Se trata de una circunferencia trigonométrica.
Para el cálculo del área de la región triangular, usaremos distancias, por ello emplearemos el valor absoluto.

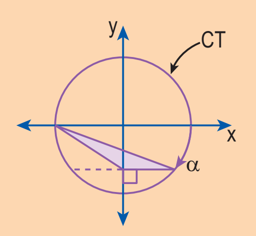
$A_{somb.} = \frac{\text{base . altura}}{2} = \frac{1.|\text{sen}\theta|}{2} = \frac{|\text{sen}\theta|}{2}$

Como $\theta \in \text{IIC} \Rightarrow \text{sen}\theta > 0 \Rightarrow |\text{sen}\theta| = \text{sen}\theta$

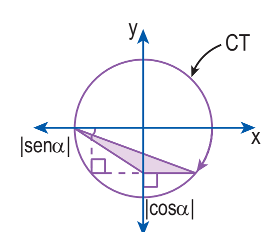
Reemplazamos:

$A_{somb.} = \frac{\text{sen}\theta}{2}$

7 Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:



$A_{somb.} = \frac{\text{base.altura}}{2} = \frac{|\cos\alpha||\text{sen}\alpha|}{2}$

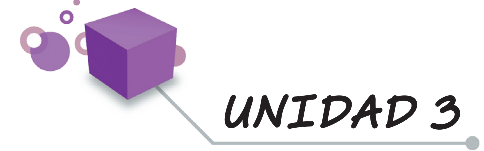
Como: $\alpha \in \text{IVC} \Rightarrow \cos\alpha > 0 \Rightarrow |\cos\alpha| = \cos\alpha$

$\text{sen}\alpha < 0 \Rightarrow |\text{sen}\alpha| = -\text{sen}\alpha$

Reemplazamos:

$A_{somb.} = \frac{(\cos\alpha)(-\text{sen}\alpha)}{2}$

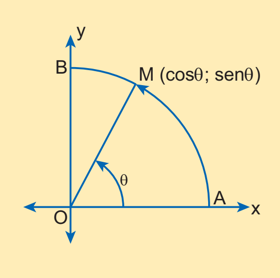
$\therefore A_{somb.} = -\frac{\text{sen}\alpha \cos\alpha}{2}$



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Importante

Debes recordar que en una circunferencia trigonométrica se cumple:



(cosθ; senθ) = (x; y)

DEFINICIÓN

Es una ecuación que contiene operadores trigonométricos (sen, cos, sec, csc, tan y cot) y que es válida para todos los valores admisibles de la variable o variables.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

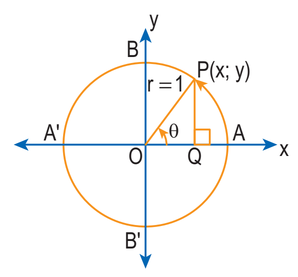
Las identidades fundamentales se dividen en tres grupos:
a) Identidades recíprocas
b) Identidades por cociente
c) Identidades pitagóricas

A continuación estudiaremos cada uno de estos grupos:

a) Identidades recíprocas

Para realizar la definición y demostración de cada identidad recíproca tomaremos como referencia la circunferencia trigonométrica.

Analizamos el siguiente gráfico:



Del triángulo rectángulo PQO tenemos:

$$\csc\theta = \frac{OP}{PQ} = \frac{1}{\text{sen}\theta};\ \text{sen}\theta \neq 0 \Rightarrow \theta \neq n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{sen}\theta\csc\theta = 1}\ ;\ \forall\ \theta \in \mathbb{R} - \{n\pi\ /\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Además:

$$\sec\theta = \frac{OP}{OQ} = \frac{1}{\cos\theta};\ \cos\theta \neq 0$$

$$\Rightarrow\ \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \neq \mathbb{Z}$$

Luego: $\boxed{\sec\theta\cos\theta = 1}$;

$$\forall\ \theta \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\ /\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Por último, definimos la última identidad recíproca:

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} \wedge \cot\theta = \frac{OQ}{PQ} \Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\Rightarrow\ \tan\theta \neq 0\ \wedge\ \theta \neq n\frac{\pi}{2}\ ;\ n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto: $\boxed{\cot\theta\tan\theta = 1}$;

$$\forall\ \theta \in \mathbb{R} - \left\{n\frac{\pi}{2}\ /\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Nota

En resumen, las identidades recíprocas son:
senθcscθ = 1
secθcosθ = 1
cotθtanθ = 1

De las identidades recíprocas se deducen las siguientes identidades:

$\text{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$
$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$



b) Identidades por cociente

Tomaremos como referencia, para la definición y demostración de estas identidades, el gráfico anteriormente presentado.

Sabemos que: $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta};\ \cos\theta \neq 0$

$$\Rightarrow\ \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}};\ \forall\ \theta \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\ /\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Luego: $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta};\ \text{sen}\theta \neq 0$

$$\Rightarrow\ \theta \neq n\pi\ ;\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}};\ \forall\theta \in \mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$$

Nota

En resumen, las identidades por cociente son:

$\tan\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}$

c) Identidades pitagóricas

Del gráfico anterior, observamos que en el triángulo rectángulo PQO se cumple lo siguiente:

$$x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow \boxed{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1};\ \forall\ \theta \in \mathbb{R}$$

Dividimos entre $\cos^2\theta$ la identidad anterior:

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta \neq 0\ ;\ \theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta};\ \forall\ \theta \in \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\ /\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Por último, dividimos la primera identidad pitagórica entre $\operatorname{sen}^2\theta$:

$$\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \Rightarrow 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta \neq 0;\ \theta \neq n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta};\ \forall\ \theta \in \mathbb{R} - \{n\pi\ /\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Atención

En la resolución de problemas debemos notar que se usa más de una identidad. También se recomienda expresar todo el enunciado en función de senos y cosenos, casi siempre es necesario para identificar las identidades.



Ejemplos:
A continuación presentamos diferentes aplicaciones de las identidades trigonométricas.

1. Simplifica:

$$P = \frac{\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}$$

Resolución:
Expresemos **P** en función de senos y cosenos:

$$P = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \operatorname{sen}^2 x}{\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)}{\cos^2 x\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 1\right)}$$

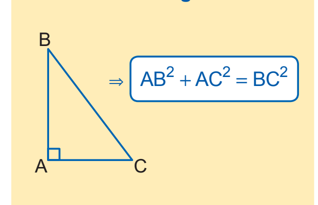
Luego de factorizar, multiplicamos en aspa:

$$P = \frac{\operatorname{sen}^2 x\left(\dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)}{\cos^2 x\left(\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$P = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\operatorname{sen}^6 x}{\cos^6 x} = \tan^6 x$$

Importante

Teorema de Pitágoras



2. Demuestra: $\cos x \cot x - (1 - 2\operatorname{sen}^2 x) \csc x = \operatorname{sen} x$

Resolución:
Para demostrar identidades debemos comenzar trabajando en el miembro más operativo.

$$\cos x \cot x - (1 - 2\operatorname{sen}^2 x)\csc x = \operatorname{sen} x$$

Expresamos cada término en función de senos y cosenos:

$$\cos x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - (1 - 2\operatorname{sen}^2 x)\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} + 2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x} + 2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} + 2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

$$-\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$



Nota

Las identidades pitagóricas en resumen son:

$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

3. Si: $\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{1}{2}$; halla $\operatorname{sen} x \cos x$.

Resolución:
Elevamos al cuadrado cada miembro del dato:

$$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$$



$$1 + 2\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right)$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = -\frac{3}{8}$$



IDENTIDADES AUXILIARES

1. $\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$
2. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$
3. $(1 \pm \text{sen}\theta \pm \cos\theta)^2 = 2(1 \pm \text{sen}\theta)(1 \pm \cos\theta)$
4. $\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta$
5. $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta$

Observación

Las siguientes identidades se deducen de las identidades pitagóricas:

$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$

$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

Demostración

A continuación demostraremos las identidades auxiliares usando las identidades fundamentales.

1. $(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)^2 = (1)^2$

   $\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta + 2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta = 1$

   $\boxed{\text{sen}^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}$

2. $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} = \dfrac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\text{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{1}{\text{sen}\theta\cos\theta}$

   $\boxed{\tan\theta + \cot\theta = \csc\theta\sec\theta}$

3. $(1 + \text{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 2\text{sen}\theta + 2\cos\theta + 2\text{sen}\theta\cos\theta$

   $(1 + \text{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 2 + 2\text{sen}\theta + 2\cos\theta + 2\text{sen}\theta\cos\theta$

   $(1 + \text{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 2(1 + \text{sen}\theta) + 2\cos\theta(1 + \text{sen}\theta)$

   $(1 + \text{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 2(1 + \text{sen}\theta)(1 + \cos\theta)$

   En general: $\boxed{(1 \pm \text{sen}\theta \pm \cos\theta)^2 = 2(1 \pm \text{sen}\theta)(1 \pm \cos\theta)}$

4. $(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)^3 = (1)^3$

   $\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta + 3(\text{sen}^2\theta\cos^2\theta)(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = 1$

   $\boxed{\text{sen}^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}$

5. $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} + \dfrac{1}{\text{sen}^2\theta}$

   $\sec^2\theta + \csc^2\theta = \dfrac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta\text{sen}^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta\text{sen}^2\theta}$

   $\boxed{\sec^2\theta + \csc^2\theta = \sec^2\theta\csc^2\theta}$

EFECTUAR



1. Reduce:
   $L = (\tan\theta + \cot\theta)\text{sen}\theta$

2. Reduce:
   $E = \text{sen}\alpha\tan\alpha + \cos\alpha$

3. Reduce:
   $V = \tan x(\csc x - \text{sen}x)$

4. Reduce:
   $R = (\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\text{sen}\alpha - \cos\alpha)^2$

5. Simplifica:
   $I = \dfrac{\text{sen}x}{1 + \cos x} + \cot x$

6. Simplifica:
   $N = \dfrac{\text{sen}\theta - \cos\theta}{\csc\theta - \text{sen}\theta}$

7. Reduce:
   $U = (\sec\alpha - \cos\alpha)(1 + \cot^2\alpha)$

8. Si: $\text{sen}x\cos x = n$
   Halla: $N = \tan x + \cot x$

9. Halla k si:
   $2(1 + \text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = k(1 + \text{sen}\alpha)(1 + \cos\alpha)$

10. Si: $\dfrac{\text{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\text{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha} = \dfrac{3}{2}$
    Halla: $\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$

11. Si: $\text{sen}\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
    Halla: $4\text{sen}\alpha\cos\alpha$

12. Si: $\text{sen}\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$
    Calcula: $1 + \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

T

Problemas resueltos

1 $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Halla el valor de $4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.

Resolución:

Tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$1 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = -1$$

2 Dada la siguiente igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha} = \frac{3}{2}$$

Halla: $k = \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha$

Resolución:

Por teoría tenemos:

$$\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2k$$

$$\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 3k$$

Reemplazamos en la igualdad:

$$\frac{\operatorname{sen}^4\alpha + \cos^4\alpha}{\operatorname{sen}^6\alpha + \cos^6\alpha} = \frac{1-2k}{1-3k} = \frac{3}{2}$$

$$2 - 4k = 3 - 9k$$

$$5k = 3 - 2$$

$$\therefore\ k = 1/5$$

3 Si: $\tan^2x + 4\tan x = 1$;

halla: $J = \cot x - \tan x$

Resolución:

El dato, dividimos entre tanx:

$$\frac{\tan^2x + 4\tan x}{\tan x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x + 4 = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x + 4 = \cot x$$

$$4 = \cot x - \tan x$$

$$\therefore\ J = 4$$

4 Simplifica:

$$E = \frac{1 + \operatorname{sen}x + \tan x + \sec x}{1 + \cos x + \cot x + \csc x}$$

Resolución:

$$E = \frac{1 + \operatorname{sen}x + \dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + \dfrac{1}{\cos x}}{1 + \cos x + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}x}}$$

$$E = \frac{1 + \operatorname{sen}x + \dfrac{\operatorname{sen}x + 1}{\cos x}}{1 + \cos x + \dfrac{\cos x + 1}{\operatorname{sen}x}} = \frac{(\operatorname{sen}x + 1)\left(1 + \dfrac{1}{\cos x}\right)}{(\cos x + 1)\left(1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}x}\right)}$$

$$E = \frac{(\operatorname{sen}x + 1)\dfrac{(\cos x + 1)}{\cos x}}{(\cos x + 1)\dfrac{(\operatorname{sen}x + 1)}{\operatorname{sen}x}} = \frac{\dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}x}} = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$

$$\therefore\ E = \tan x$$

5 Si: $\cos x + \cos^2x = 1$, calcula:

$$H = \frac{7 + \operatorname{sen}^2x + \operatorname{sen}^4x}{2}$$

Resolución:

Del dato:

$\cos x = 1 - \cos^2x = \operatorname{sen}^2x$ ... (1)

Reemplazando (1) en la expresión:

$$H = \frac{7 + \operatorname{sen}^2x + (\cos x)^2}{2}$$

$$H = \frac{7 + (\operatorname{sen}^2x + \cos^2x)}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

6 Si: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{3} = \dfrac{\cos\alpha}{4}$; $0° < \alpha < 90°$;

halla: $U = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

Resolución:

Como: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{3} = \dfrac{\cos\alpha}{4} = k > 0$

$\Rightarrow\ \operatorname{sen}\alpha = 3k\ \wedge\ \cos\alpha = 4k$

Sabemos: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(3k)^2 + (4k)^2 = 1 \Rightarrow 9k^2 + 16k^2 = 1$

$$25k^2 = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

$$\therefore\ U = 3k \cdot 4k = 12k^2 = 12\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{12}{25}$$

7 Si: $\dfrac{1 - 2\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \dfrac{1}{2}$, halla: $N = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

Resolución:

$$\frac{1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{sen}\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$$

Elevando al cuadrado:

$$\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore\ N = \frac{3}{8}$$

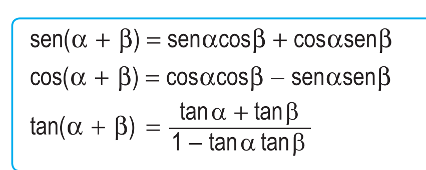
ÁNGULOS COMPUESTOS

Nota

Existen identidades auxiliares que se derivan de las identidades de la suma y diferencia de dos ángulos.

- $\tan\alpha \pm \tan\beta = \dfrac{\text{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
- $\cot\beta \pm \cot\alpha = \dfrac{\text{sen}(\alpha \pm \beta)}{\text{sen}\alpha\text{sen}\beta}$
- $\text{sen}(\alpha + \beta)\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta$
- $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\beta$
- $\tan\alpha \pm \tan\beta \pm \tan(\alpha + \beta)\tan\alpha\tan\beta = \tan(\alpha \pm \beta)$
- $1 \pm \tan\alpha\tan\beta = \dfrac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

IDENTIDADES DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS



$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\text{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

IDENTIDADES DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\text{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Ejemplos:

1. Calcula sen67°.

Resolución:

$$\text{sen}67° = \text{sen}(30° + 37°)$$
$$= \text{sen}30°\cos37° + \cos30°\text{sen}37°$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5}$$
$$= \frac{4 + 3\sqrt{3}}{10}$$

2. Calcula cos7°.

Resolución:

$$\cos7° = \cos(60° - 53°)$$
$$= \cos60°\cos53° + \text{sen}60°\text{sen}53°$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$$

3. Calcula tan24°.

Resolución:

$$\tan24° = \tan(16° + 8°)$$
$$= \frac{\tan16° + \tan8°}{1 - \tan16°\tan8°}$$
$$= \frac{\frac{7}{24} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{7}{24}\cdot\frac{1}{7}} = \frac{\frac{73}{168}}{\frac{23}{24}} = \frac{73}{161}$$

4. Calcula sen 21°.

Resolución:

$$\text{sen}(37° - 16°) = \text{sen}37°\cos16° - \cos37°\text{sen}16°$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{24}{25} - \frac{4}{5}\cdot\frac{7}{25}$$
$$= \frac{44}{125}$$

5. Calcula sen75°sen15°.

Resolución:

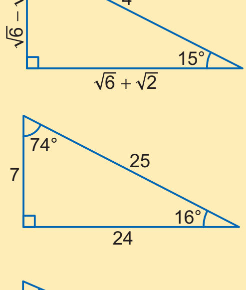
$$\text{sen}75°\text{sen}15° = \text{sen}(45° + 30°)\text{sen}(45° - 30°)$$
$$= \text{sen}^2 45° - \text{sen}^2 30°$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}$$

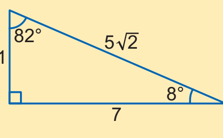
6. Calcula: E = tan22° + tan23° + tan22° tan23°.

Resolución:

$$E = \tan22° + \tan23° + 1\,.\,\tan22°\tan23°$$
$$E = \tan22° + \tan23° + \tan(22° + 23°)\tan22°\tan23°$$
$$E = \tan(22° + 23°) = \tan45°$$
$$E = 1$$

Recuerda





PROPIEDADES

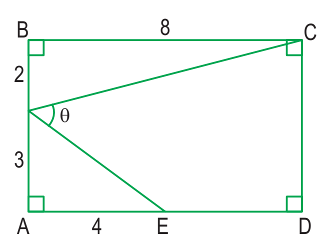
1. Si: f(x) = asenx + bcosx, entonces:
$f(x)_{máx.} = \sqrt{a^2 + b^2} \;\wedge\; f(x)_{mín.} = -\sqrt{a^2 + b^2}$

2. Si: $A + B + C = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$
Se cumple:
tanA + tanB + tanC = tanAtanBtanC
cotAcotB + cotBcotC + cotBcotA = 1

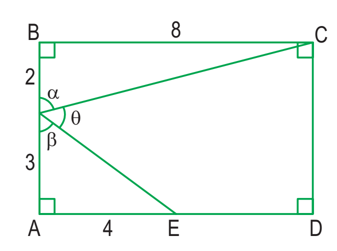
3. Si: $A + B + C = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$
Se cumple:
cotA + cotB + cotC = cotAcotBcotC
tanAtanB + tanBtanC + tanCtanA = 1

Ejemplos:

1. Calcula $\tan\theta$.



Resolución:



$$\alpha+\theta+\beta=180° \Rightarrow \tan\alpha+\tan\theta+\tan\beta=\tan\alpha\tan\theta\tan\beta$$

$$\frac{8}{2}+\tan\theta+\frac{4}{3}=\frac{8}{2}\tan\theta\frac{4}{3}$$

$$4+\tan\theta+\frac{4}{3}=\frac{16}{3}\tan\theta$$

$$\frac{16}{3}=\frac{13}{3}\tan\theta$$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{16}{13}$$

Atención

También se puede usar:

$\cot\alpha\cot\theta+\cot\theta\cot\beta+\cot\beta\cot\alpha=1$

$\frac{2}{8}\cdot\cot\theta+\cot\theta\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{8}=1$

$\cot\theta+\frac{3}{16}=1$

$\cot\theta=\frac{13}{16}$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{16}{13}$



2. Si: $\alpha+\beta+\phi+\theta=\frac{\pi}{2}$.

$A=\tan(2\alpha+3\beta-\theta)\tan(\alpha-2\beta+3\theta)$, $B=\tan(\alpha-2\beta+3\theta)\tan(\phi-\theta-2\alpha)$

$C=\tan(\phi-\theta-2\alpha)\tan(2\alpha+3\beta-\theta)$. Calcula: $A+B+C$

Resolución:

Sean: $x=2\alpha+3\beta-\theta$, $y=\alpha-2\beta+3\theta$, $z=\phi-\theta-2\alpha$

$A=\tan x\tan y$

$B=\tan y\tan z$

$C=\tan x\tan z$

Además: $x+y+z=\alpha+\beta+\phi+\theta=\frac{\pi}{2}$

Entonces: $A+B+C=\tan x\tan y+\tan y\tan z+\tan x\tan z=1$

Recuerda

Si: $x+y+z=\pi$

$\text{sen}x=\text{sen}y+z$

$\cos x=-\cos y+z$

$\tan x=-\tan y+z$



3. Si A, B y C son los ángulos de un triángulo, calcula:

$$R=\frac{\cos A}{\text{sen}B\,\text{sen}C}+\frac{\cos B}{\text{sen}A\,\text{sen}C}+\frac{\cos C}{\text{sen}A\,\text{sen}B}$$

Resolución:

Dato: $A+B+C=\pi$ $\left\{\begin{array}{l}\cos A=-\cos(B+C)\\ \cos B=-\cos(A+C)\\ \cos C=-\cos(A+B)\end{array}\right.$

$$R=\frac{-\cos(B+C)}{\text{sen}B\,\text{sen}C}+\frac{-\cos(A+C)}{\text{sen}A\,\text{sen}C}+\frac{-\cos(A+B)}{\text{sen}A\,\text{sen}B}$$

$$R=\frac{-\cos B\cos C+\text{sen}B\,\text{sen}C}{\text{sen}B\,\text{sen}C}+\frac{-\cos A\cos C+\text{sen}A\,\text{sen}C}{\text{sen}A\,\text{sen}C}+\frac{-\cos A\cos B+\text{sen}A\,\text{sen}B}{\text{sen}A\,\text{sen}B}$$

$$R=-\cot B\cot C+1-\cot A\cot C+1-\cot A\cot B+1$$

$$R=3-\underbrace{(\cot A\cot B+\cot A\cot C+\cot B\cot C)}_{=1}\quad\Rightarrow\quad R=3-1=2$$

Problemas resueltos

1 Si: $\cos(45° - \theta) = m$
Calcula: $\text{sen}\theta\cos\theta$, en términos de m.

Resolución:

Del dato:

$\cos(45° - \theta) = m$

$\Rightarrow \cos45°\cos\theta + \text{sen}45°\text{sen}\theta = m$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\theta = m$

$\Rightarrow \text{sen}\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\,m$

Elevando al cuadrado:

$(\text{sen}\theta + \cos\theta)^2 = (\sqrt{2}\,m)^2$

$\underbrace{\text{sen}^2\theta + 2\text{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta}_{1} = 2m^2$

$\Rightarrow 1 + 2\text{sen}\theta\cos\theta = 2m^2$

$\therefore \text{sen}\theta\cos\theta = \frac{2m^2 - 1}{2}$

2 Si: $\tan(a - b) = 2 \wedge \tan(b + c) = 3$
Calcula $\tan(a + c)$.

Resolución:

Si: $a - b = \alpha$

$b + c = \beta \Rightarrow a + c = \alpha + \beta$

De los datos:

$\tan\alpha = 2 \wedge \tan\beta = 3$

Nos piden:

$\tan(a + c) = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2+3}{1-(2)(3)} = \frac{5}{-5}$

$\therefore \tan(a + c) = -1$

3 Si: $\tan(A - B) = 2$; $\tan C = 4$ y $\tan(B - C) = 1$
Halla $\tan A$.

Resolución:

Sabemos: $\tan(A - C) = \frac{\tan A - \tan C}{1 - \tan A\tan C}$ ...(1)

También:

$\tan[(A - B) + (B - C)] = \frac{\tan(A-B) + \tan(B-C)}{1 - \tan(A-B)\tan(B-C)}$ ...(2)

De (1) = (2):

$\frac{\tan A - \tan C}{1 + \tan A\tan C} = \frac{\tan(A-B) + \tan(B-C)}{1 - \tan(A-B)\tan(B-C)}$

$\frac{\tan A - 4}{1 + 4\tan A} = \frac{2+1}{1-(2)(1)}$

$\therefore \tan A = \frac{1}{13}$

4 Si: $\tan\left(\frac{4a+3b}{12}\right) = \frac{7}{24}$ y $\tan\left(\frac{5b+4c}{20}\right) = \frac{9}{40}$

Calcula $\tan\left(\frac{5a-3c}{15}\right)$.

Resolución:

Sabemos:

$\tan\left(\frac{4a}{12} + \frac{3b}{12}\right) = \frac{7}{24} \Rightarrow \tan\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4}\right) = \frac{7}{24}$

$\tan\left(\frac{5b}{20} + \frac{4c}{20}\right) = \frac{9}{40} \Rightarrow \tan\left(\frac{b}{4} + \frac{c}{5}\right) = \frac{9}{40}$

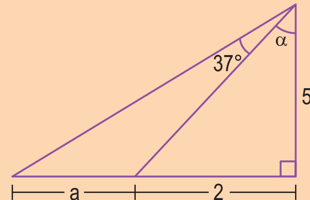
Piden:

$\tan\left(\frac{5a-3c}{15}\right) = \tan\left(\frac{a}{3} - \frac{c}{5}\right) = \tan\left(\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4}\right) - \left(\frac{b}{4} + \frac{c}{5}\right)\right)$

$= \frac{\frac{7}{24} - \frac{9}{40}}{1 + \frac{7}{24}\cdot\frac{9}{40}} = \frac{\frac{280-216}{960}}{\frac{1023}{960}}$

$\Rightarrow \tan\left(\frac{5a-3c}{15}\right) = \frac{64}{1023}$

5 En el gráfico calcula a.



Resolución:

Del gráfico:

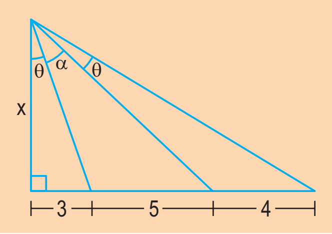
$\tan\alpha = \frac{2}{5} \wedge \tan(37° + \alpha) = \frac{a+2}{5}$

De: $\tan(37° + \alpha) = \frac{a+2}{5}$

$\Rightarrow \frac{\tan37° + \tan\alpha}{1 - \tan37°\tan\alpha} = \frac{a+2}{5} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{a+2}{5}$

$\Rightarrow a = \frac{87}{14}$

6 En el gráfico, calcula x.



Resolución:

Del gráfico:

$\tan\theta = \frac{3}{x}$; $\tan(\theta + \alpha) = \frac{8}{x}$;

$\tan(2\theta + \alpha) = \frac{12}{x} \Rightarrow \tan(\theta + (\theta + \alpha)) = \frac{12}{x}$

$\frac{\tan\theta + \tan(\theta + \alpha)}{1 - \tan\theta\tan(\theta + \alpha)} = \frac{12}{x}$

$\frac{\frac{3}{x} + \frac{8}{x}}{1 - \frac{3}{x}\cdot\frac{8}{x}} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 12\sqrt{2}$

ÁNGULOS MÚLTIPLES

IDENTIDADES DEL ÁNGULO DOBLE

Seno del ángulo doble

$$\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$$

Coseno del ángulo doble

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$$

Formulas de degradación del coseno

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta$$

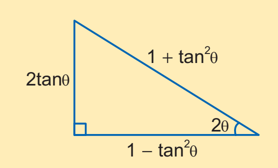
Tangente del ángulo doble

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Observación

Triángulo rectángulo del ángulo doble

Si consideramos a 2θ agudo se tiene:





Ejemplos:

1. Simplifica:

$$B = \frac{8\text{senx}\cos x\cos 2x\cos 4x}{2\text{sen}8x}$$

Resolución:

$$B = \frac{4(2\text{senx}\cos x)\cos 2x\cos 4x}{2\text{sen}8x} = \frac{4\text{sen}2x\cos 2x\cos 4x}{2\text{sen}8x} = \frac{2(2\text{sen}2x\cos 2x)\cos 4x}{2\text{sen}8x}$$

$$B = \frac{2\text{sen}4x\cos 4x}{2\text{sen}8x} = \frac{\text{sen}8x}{2\text{sen}8x} = \frac{1}{2}$$

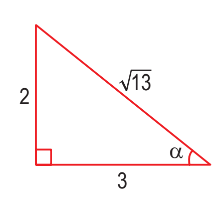
Nota

Para "n" cosenos:
$\cos x\cos 2x\cos 4x \ldots \cos 2^{n-1}x$

$$= \frac{\text{sen}2^n x}{2^n\text{senx}}$$

2. Si: $\tan\alpha = \frac{2}{3}$, halla: $\text{sen}2\alpha - \cos 2\alpha$

Resolución:



$$\text{sen}2\alpha = 2\text{sen}\alpha\cos\alpha = 2\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{5}{13}$$

$$\text{sen}2\alpha - \cos 2\alpha = \frac{12}{13} - \frac{5}{13} = \frac{7}{13}$$

Recuerda

Propiedades adicionales

- $\cot\theta + \tan\theta = 2\csc 2\theta$
- $\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$



3. Si: $16\tan x + \tan^2 x = 1$. Calcula: $\tan 4x$

Resolución:

Del dato: $16\tan x = 1 - \tan^2 x$

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{1}{8}$$

$$\tan 2x = \frac{1}{8}$$

Piden: $\tan 4x = \frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x}$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{8}\right)}{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{16}{63}$$

IDENTIDADES DEL ÁNGULO MITAD

Seno del ángulo mitad

$$\text{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

Coseno del ángulo mitad

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

Tangente del ángulo mitad

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

Nota

El signo + o – depende del cuadrante al que pertenece $\frac{\theta}{2}$.



Atención

Fórmulas adicionales

- $\tan\frac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta$
- $\cot\frac{\theta}{2} = \csc\theta + \cot\theta$

Nota

Fórmulas adicionales

- $\text{sen}3\theta = \text{sen}\theta(2\cos2\theta + 1)$
- $\cos3\theta = \cos\theta(2\cos2\theta - 1)$
- $4\text{sen}\theta\,\text{sen}(60°-\theta)\text{sen}(60°+\theta) = \text{sen}3\theta$
- $4\cos\theta\cos(60°-\theta)\cos(60°+\theta) = \cos3\theta$
- $\tan\theta\tan(60°-\theta)\tan(60°+\theta) = \tan3\theta$



Recuerda

Triángulo rectángulo notable de 54° y 36°

Catetos: $\sqrt{10-2\sqrt5}$ y $\sqrt5+1$; hipotenusa: 4; ángulos: 54° y 36°.

Ejemplos:

1. Si: $\cos\theta = \frac{3}{8} \wedge \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

   Calcula: $\cos\frac{\theta}{2}$

   Resolución:

   $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < \pi \Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \text{IIC}$

   $$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{8}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{11}{8}}{2}} = -\frac{\sqrt{11}}{4}$$

   $\therefore \cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{11}}{4}$

2. Si: $\cos\theta = -\frac{1}{3}, \quad \theta \in \left\langle -\frac{3\pi}{2}; -\pi \right\rangle$

   Calcula: $\tan\frac{\theta}{2}$

   Resolución:

   $-\frac{3\pi}{2} < \theta < -\pi \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} \in \text{IIIC}$

   $$\tan\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}} = \sqrt2$$

   $\therefore \tan\frac{\theta}{2} = \sqrt2$

IDENTIDADES DEL ÁNGULO TRIPLE

Seno del ángulo triple

$$\text{sen}3\theta = 3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta$$

Coseno del ángulo triple

$$\cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

Tangente del ángulo triple

$$\tan3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

Ejemplos:

1. $\text{sen}18\theta = 3\text{sen}6\theta - 4\text{sen}^3 6\theta$
2. $\text{sen}\theta = 3\text{sen}\frac{\theta}{3} - 4\text{sen}^3\frac{\theta}{3}$
3. $\cos27\theta = 4\cos^3 9\theta - 3\cos9\theta$
4. $\cos2\theta = 4\cos^3\frac{2\theta}{3} - 3\cos\frac{2\theta}{3}$
5. $\tan12\alpha = \frac{3\tan4\alpha - \tan^3 4\alpha}{1 - 3\tan^2 4\alpha}$
6. $\tan57° = \frac{3\tan19° - \tan^3 19°}{1 - 3\tan^2 19°}$

EFECTUAR



1. Si: $\tan x = \frac{2}{3}$, halla $\csc4x$.
2. Reduce: $\cot6x - \tan6x$
3. Si: $\tan(45° + x) = \frac{2}{5}$, halla $\cos2x$.
4. Si: $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt2}{3}$, halla $\text{sen}3x$.
5. Si $\text{sen}\theta = \frac{1}{6}$, calcula $\text{sen}3\theta$.
6. Si $x = \frac{\pi}{8}$, calcula: $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
7. Halla x, si: $\cot x = \frac{\tan40°\tan20°}{\tan10°}$
8. Calcula $\text{sen}6x$, si: $\text{sen}x + \cos x = \frac{\sqrt5}{2}$

Problemas resueltos

1 Sabiendo que: $\cot\alpha - \tan\alpha = 2$, halla: $\text{sen}4\alpha$

Resolución:
Trabajamos en la condición del problema:

$\tan\alpha(\cot\alpha - \tan\alpha) = 2\tan\alpha$

$\Rightarrow \tan\alpha\cot\alpha - \tan^2\alpha = 2\tan\alpha$

$1 - \tan^2\alpha = 2\tan\alpha$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow 1 = \tan2\alpha$

Nos piden:

$\text{sen}4\alpha = \dfrac{2\tan2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha} = \dfrac{2(1)}{1+(1)^2}$

$\therefore \text{sen}4\alpha = 1$

2 Sabiendo que: $\tan^2\alpha = 2\tan^2\beta + 1$, halla:
$M = \cos2\alpha + \text{sen}^2\beta$

Resolución:
Trabajamos en la condición:

$\sec^2\alpha - 1 = 2(\sec^2\beta - 1) + 1$

$\sec^2\alpha - 1 = 2\sec^2\beta - 1$

$\Rightarrow \sec^2\alpha = 2\sec^2\beta$

$\Rightarrow \cos^2\beta = 2\cos^2\alpha$ ...(1)

En la expresión pedida tenemos:

$M = 2\cos^2\alpha - 1 + 1 - \cos^2\beta$

$M = 2\cos^2\alpha - \cos^2\beta$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2) tendremos:

$M = \cos^2\beta - \cos^2\beta$

$\therefore M = 0$

3 Halla el máximo valor que puede tomar la siguiente expresión:

$T = \dfrac{1-\cos2\phi}{2+\sqrt{2(1+\cos2\phi)}}$; donde ϕ es un ángulo agudo.

Resolución:

$$T = \frac{1-(1-2\text{sen}^2\phi)}{2+\sqrt{2(1+2\cos^2\phi-1)}} = \frac{2\text{sen}^2\phi}{2+\sqrt{4\cos^2\phi}} = \frac{2\text{sen}^2\phi}{2+2\cos\phi}$$

$$T = \frac{2(1-\cos^2\phi)}{2(1+\cos\phi)} = \frac{(1+\cos\phi)(1-\cos\phi)}{1+\cos\phi}$$

$T = 1 - \cos\phi$

Observamos que: $0 < \cos\phi < 1$ (ϕ es agudo)
Entonces $T_{máx.}$, si $\cos\phi$ es mínimo $\Rightarrow \cos\phi = 0$

$\Rightarrow T_{máx.} = 1 - (0)$

$\therefore T_{máx.} = 1$

4 Entre qué valores varía la expresión E, si:

$E = \dfrac{4\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1+\tan^2\alpha)^2}$

Resolución:

(Triángulo ABC rectángulo en B: hipotenusa AC $= 1+\tan^2\alpha$, cateto BC $= 2\tan\alpha$, cateto AB $= 1-\tan^2\alpha$, ángulo en A $= 2\alpha$)

Ordenando:

$$E = 2\left(\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)\left(\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)$$

En el ⊿ABC adjunto reconocemos que:

$E = 2(\text{sen}2\alpha)(\cos2\alpha) \Rightarrow E = \text{sen}4\alpha$

Pero sabemos que: $-1 \le \text{sen}4\alpha \le 1$

$\Rightarrow -1 \le E \le 1$ $\quad\therefore E \in [-1; 1]$

5 Si: $\sec x = 5 \wedge 360° < x < 450°$
Calcula: $E = \sqrt{10}\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Resolución:
Dato: $\sec x = 5 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{5}$

$180° < \dfrac{x}{2} < 225°$

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$E = \sqrt{10}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{20}{5}} = -2$$

6 Simplifica: $M = \dfrac{1-\tan x\cot\frac{x}{2}}{1+\tan x\tan\frac{x}{2}}$

Resolución:
Por identidad auxiliar sabemos:

$\tan\dfrac{x}{2} = \csc x - \cot x \wedge \cot\dfrac{x}{2} = \csc x + \cot x$

Entonces:

$$M = \frac{1-\tan x(\csc x+\cot x)}{1+\tan x(\csc x-\cot x)} = \frac{1-\tan x\csc x - \tan x\cot x}{1+\tan x\csc x - \tan x\cot x}$$

$$M = \frac{1-\tan x\csc x - 1}{1+\tan x\csc x - 1} = -\frac{\tan x\csc x}{\tan x\csc x} = -1$$

7 Si: $\text{sen}\theta = \dfrac{a-b}{a+b}$, halla: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$

Resolución:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{2}\right); \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \in IC$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\text{sen}\theta}{1+\text{sen}\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a-b}{a+b}}}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

8 Simplifica:

$$F = \frac{\text{senx}(4\cos^2 x - 1)}{\cos x(4\text{sen}^2 x - 1)}$$

Resolución:

$$F = \frac{\text{senx}[4(1 - \text{sen}^2 x) - 1]}{\cos x[4(1 - \cos^2 x) - 1]} = \frac{\text{senx}(4 - 4\text{sen}^2 x - 1)}{\cos x(4 - 4\cos^2 x - 1)}$$

$$F = \frac{\text{senx}(3 - 4\text{sen}^2 x)}{\cos x(3 - 4\cos^2 x)} = \frac{3\text{senx} - 4\text{sen}^3 x}{3\cos x - 4\cos^3 x} = \frac{\text{sen}3x}{-\cos 3x} = -\tan 3x$$

9 Simplifica:

$$F = \frac{(2\cos 2x + 1)\text{senx}}{\tan 3x}$$

Resolución:

Sabemos: $\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2 x$

Entonces:

$$F = \frac{[2(1 - 2\text{sen}^2 x) + 1]\text{senx}}{\tan 3x} = \frac{(2 - 4\text{sen}^2 x + 1)\text{senx}}{\tan 3x}$$

$$F = \frac{3\text{senx} - 4\text{sen}^3 x}{\tan 3x} = \frac{\text{sen}3x}{\frac{\text{sen}3x}{\cos 3x}} = \cos 3x$$

10 Simplifica:

$$E = \frac{\text{senx} + \text{sen}2x + 3\text{sen}3x}{(3\cos x - 1)(2\cos x + 1)}$$

Resolución:

$$E = \frac{\text{senx} + 2\text{senx}\cos x + 3(3\text{senx} - 4\text{sen}^3 x)}{(3\cos x - 1)(2\cos x + 1)}$$

$$E = \frac{\text{senx} + 2\text{senx}\cos x + 9\text{senx} - 12\text{sen}^3 x}{(3\cos x - 1)(2\cos x + 1)}$$

$$E = \frac{2\text{senx}(5 + \cos x - 6\text{sen}^2 x)}{(3\cos x - 1)(2\cos x + 1)}$$

Pero: $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$E = \frac{2\text{senx}(5 + \cos x - 6 + 6\cos^2 x)}{(3\cos x - 1)(2\cos x + 1)} = \frac{2\text{senx}(6\cos^2 x + \cos x - 1)}{(3\cos x - 1)(2\cos x + 1)}$$

Factorizamos el numerador por aspa simple:

$$E = \frac{2\text{senx}(3\cos x - 1)(2\cos x + 1)}{(3\cos x - 1)(2\cos x + 1)} = 2\text{senx}$$

11 Simplifica: $M = 4\cos 3x\,\text{sen}^3 x + 4\text{sen}3x\cos^3 x$

Resolución:

Sabemos:

$\text{sen}3x = 3\text{senx} - 4\text{sen}^3 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

Reemplazando:

$M = 4(4\cos^3 x - 3\cos x)\text{sen}^3 x + 4(3\text{senx} - 4\text{sen}^3 x)\cos^3 x$

$M = 4(4\cos^3 x\,\text{sen}^3 x - 3\cos x\,\text{sen}^3 x + 3\text{senx}\cos^3 x - 4\text{sen}^3 x\cos^3 x)$

$M = 4[3\text{senx}\cos x(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)]$

$M = 12\text{senx}\cos x\cos 2x$

$M = 6 \,.\, 2\text{senx}\cos x\cos 2x = 6\text{sen}2x\cos 2x$

$M = 3 \,.\, 2\text{sen}2x\cos 2x \quad \Rightarrow \quad M = 3\text{sen}4x$

12 Si $\text{sen}\theta = \frac{1}{4}$, calcula:

$$M = \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$$

Resolución:

Por identidad:

$$M = \frac{\cos\theta(2\cos 2\theta - 1)}{\cos\theta} = 2\cos 2\theta - 1$$

Sabemos por identidad del ángulo doble:

$\cos 2\theta = 1 - 2\text{sen}^2\theta$

Reemplazando:

$M = 2(1 - 2\text{sen}^2\theta) - 1$

$M = 1 - 4\text{sen}^2\theta = 1 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$M = 1 - 4\left(\frac{1}{16}\right) = 1 - \frac{1}{4} \qquad \therefore\ M = \frac{3}{4}$

13 Si: $14\tan x + \tan^2 x = 1$

Calcula: $\tan 4x$

Resolución:

$14\tan x = 1 - \tan^2 x$

$7 \,.\, 2\tan x = 1(1 - \tan^2 x)$

$$\underbrace{\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}}_{\tan 2x} = \frac{1}{7}$$

$\tan 2x = \frac{1}{7}$

Nos piden: $\tan 4x$

$$\tan 4x = \tan 2(2x) = \frac{2\tan 2x}{1 - \tan^2 2x}$$

$$\tan 4x = \frac{2\left(\frac{1}{7}\right)}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{48}{49}}$$

$$\therefore\ \tan 4x = \frac{7}{24}$$

14 Si: $2\tan^3\theta = 3\tan^2\theta + 6\tan\theta - 1$

Calcula: $\tan 6\theta$

Resolución:

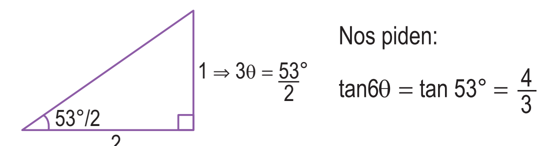
$2\tan^3\theta = 3\tan^2\theta + 6\tan\theta - 1$

$1 - 3\tan^2\theta = 6\tan\theta - 2\tan^3\theta$

$1(1 - 3\tan^2\theta) = 2(3\tan\theta - \tan^3\theta)$

$$\frac{1}{2} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$\frac{1}{2} = \tan 3\theta$$



Nos piden:

$$\tan 6\theta = \tan 53° = \frac{4}{3}$$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

T

Las transformaciones trigonométricas tienen como objetivo expresar sumas o diferencias de senos y/o cosenos en forma de producto (o viceversa) para simplificar expresiones trigonométricas.

TRANSFORMACIÓN DE UNA SUMA O DIFERENCIA A PRODUCTO

Suma y diferencia de senos

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\theta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$\text{sen}\alpha - \text{sen}\theta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)$$

Demostración:

Sabemos por ángulos compuestos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}(x+y) = \text{senxcosy} + \text{cosxseny} \\ \text{sen}(x-y) = \text{senxcosy} - \text{cosxseny}\end{array}\right\} (+)$$

Al sumar ambas expresiones obtenemos:

$$\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) = 2\text{senxcosy} \quad ...(1)$$

Luego realizamos un cambio de variable:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = x+y \\ \theta = x-y\end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\alpha+\theta}{2} \quad \wedge \quad y = \frac{\alpha-\theta}{2}$$

Por último reemplazamos estos valores en (1) y obtenemos:

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\theta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

La diferencia de senos se podrá demostrar de forma análoga.

Atención

Para la demostración de las transformaciones trigonométricas hemos utilizado las identidades de ángulos compuestos estudiadas anteriormente.



Suma y diferencia de cosenos

$$\cos\alpha + \cos\theta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\theta = -2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

Demostración:

Tenemos por ángulos compuestos:

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x+y) = \text{cosxcosy} - \text{senxseny} \\ \cos(x-y) = \text{cosxcosy} + \text{senxseny}\end{array}\right\} (+)$$

Sumamos ambas expresiones:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\text{cosxcosy} \quad ...(2)$$

Realizamos el cambio de variable anteriormente utilizado:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = x+y \\ \theta = x-y\end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{\alpha+\theta}{2} \wedge y = \frac{\alpha-\theta}{2}$$

Finalmente, al realizar el cambio en (2) obtenemos:

$$\cos\alpha + \cos\theta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

La diferencia de cosenos se demuestra de manera análoga.

Importante

Si al aplicar las transformaciones trigonométricas obtenemos ángulos negativos debes emplear las identidades de ángulos negativos.



Ejemplo:

Simplifica:

$$R = \frac{\text{sen}2x + \text{sen}5x + \text{sen}8x}{\cos 2x + \cos 5x + \cos 8x}$$

Resolución:
Agrupamos convenientemente y transformamos a producto:

$$R = \frac{\text{sen}2x + \text{sen}8x + \text{sen}5x}{\cos 2x + \cos 8x + \cos 5x}$$

$$R = \frac{2\text{sen}\left(\frac{2x+8x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-8x}{2}\right) + \text{sen}5x}{2\cos\left(\frac{2x+8x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-8x}{2}\right) + \cos 5x}$$

$$R = \frac{2\text{sen}5x\cos 3x + \text{sen}5x}{2\cos 5x\cos 3x + \cos 5x}$$

Factorizamos el término en común:

$$R = \frac{\text{sen}5x(2\cos 3x + 1)}{\cos 5x(2\cos 3x + 1)} = \frac{\text{sen}5x}{\cos 5x} = \tan 5x$$

Observación

La siguiente identidad también es muy usada, veamos:
Si: $\alpha + \beta + \theta = 180°$
$\Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta = \tan\alpha\tan\beta\tan\theta$



TRANSFORMACIÓN DE UN PRODUCTO A UNA SUMA O DIFERENCIA

$$2\text{sen}\alpha\cos\theta = \text{sen}(\alpha+\theta) + \text{sen}(\alpha-\theta)$$

$$2\cos\alpha\cos\theta = \cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha-\theta)$$

$$2\text{sen}\alpha\,\text{sen}\theta = \cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta)$$

Nota

También puedes utilizar estas identidades:

- $\text{sen}(a+b)\text{sen}(a-b) = \text{sen}^2a - \text{sen}^2b$
- $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2a - \cos^2b$

La demostración de cada una de estas identidades se realizará de manera muy sencilla haciendo uso de las identidades de ángulos compuestos de la misma forma en que lo hicimos anteriormente.

Ejemplo:

Calcula:

$A = 32\text{sen}36°\ \text{sen}72°\ \text{sen}108°\ \text{sen}144°$

Resolución:

Agrupamos de manera conveniente:

$A = 8(2\text{sen}144°\text{sen}36°)(2\text{sen}108°\text{sen}72°)$

$A = 8(\cos108° - \cos180°)(\cos36° - \cos180°)$

Además sabemos que: $\cos108° = -\cos72°$

$A = 8(-\cos72° - \cos180°)(\cos36° - \cos180°)$

$A = 8\left[-\frac{\sqrt{5}-1}{4} - (-1)\right]\left[\frac{\sqrt{5}+1}{4} - (-1)\right]$

$A = 8\left[1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]\left[1 + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right]$

$A = 8\left[\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right]\left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right) = 8\left[\frac{(5)^2 - (\sqrt{5})^2}{(4)^2}\right]$

$A = 8\left[\frac{25-5}{16}\right] = 10$

Propiedades

Si: $\alpha + \beta + \theta = 180°$, entonces:

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta + \text{sen}\theta = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\theta = 4\text{sen}\frac{\alpha}{2}\,\text{sen}\frac{\beta}{2}\,\text{sen}\frac{\theta}{2} + 1$$

$$\text{sen}2\alpha + \text{sen}2\beta + \text{sen}2\theta = 4\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta\,\text{sen}\theta$$

$$\cos2\alpha + \cos2\beta + \cos2\theta = -4\cos\alpha\cos\beta\cos\theta - 1$$

$$\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\theta = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = -2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta + 1$$

SERIES TRIGONOMÉTRICAS

1. Serie de senos cuyos ángulos se encuentran en progresión aritmética

$$\text{sen}x + \text{sen}(x+r) + \text{sen}(x+2r) + \ldots + \text{sen}(x+(n-1)r) = \frac{\text{sen}\frac{nr}{2}}{\text{sen}\frac{r}{2}}\text{sen}\left(\frac{P+U}{2}\right)$$

Observación

$M = \text{sen}1° + \text{sen}2° + \text{sen}3° + \ldots + \text{sen}90° = \frac{1}{2}\cot\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ} + \frac{1}{2}$



2. Serie de cosenos cuyos ángulos se encuentran en progresión aritmética

$$\cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \ldots + \cos(x+(n-1)r) = \frac{\text{sen}\frac{nr}{2}}{\text{sen}\frac{r}{2}}\cos\left(\frac{P+U}{2}\right)$$

Donde:
- P : primer ángulo
- U : último ángulo
- n : n.° de términos
- r : razón

PRODUCTOS TRIGONOMÉTRICOS NOTABLES

$\forall\ n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple:

$$\text{sen}\frac{\pi}{2n+1}\cdot\text{sen}\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\text{sen}\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\text{sen}\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\cos\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

$$\tan\frac{\pi}{2n+1}\cdot\tan\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\tan\frac{3\pi}{2n+1}\ldots\tan\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$$

Problemas resueltos

1 Calcula el valor de M . N si:
$M = 8sen36°sen144° \wedge N = 4sen72°sen108°$

Resolución:

En M tenemos:

$M = 8sen36°sen144°$

$M = 4 . 2sen36°sen144°$

$M = 4[\cos(144° - 36°) - \cos(144° + 36°)]$

$M = 4(\cos108° - \cos180°) = 4(\cos108° + 1)$

En N tenemos:

$N = 4sen72°sen108° = 2 . 2sen72°sen108°$

$N = 2[\cos(108° - 72°) - \cos(72° + 108°)]$

$N = 2[\cos36° - \cos180°] = 2(\cos36° + 1)$

M . N:

$M . N = 4(\cos108° + 1)2(\cos36° + 1)$

$M . N = 8(\cos108° + 1)(\cos36° + 1)$ ... (1)

$\cos108° = -sen18° = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\cos36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

En (1) reemplazamos:

$$M . N = 8\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4}+1\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}+1\right)$$

$$M . N = 8\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right) = 8\left(\frac{25-5}{16}\right) = 10$$

$\therefore\ M . N = 10$

2 Factoriza:
$T = sen\beta + sen3\beta + sen5\beta + sen7\beta$

Resolución:

$T = sen\beta + sen7\beta + sen3\beta + sen5\beta$

$T = 2sen4\beta\cos3\beta + 2sen4\beta\cos\beta$

$T = 2sen4\beta(\cos3\beta + \cos\beta)$

$T = 2sen4\beta\left[2\cos\left(\frac{3\beta+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{3\beta-\beta}{2}\right)\right]$

$T = 4\ sen4\beta\cos2\beta\cos\beta$

3 Simplifica:

$$E = \frac{sen(\alpha+\theta) - sen(\alpha-\theta)}{\cos(\beta-\theta) - \cos(\beta+\theta)}$$

Resolución:

$$E = \frac{2\cos\left[\frac{(\alpha+\theta)+(\alpha-\theta)}{2}\right]sen\left[\frac{(\alpha+\theta)-(\alpha-\theta)}{2}\right]}{2sen\left[\frac{(\beta-\theta)+(\beta+\theta)}{2}\right]sen\left[\frac{(\beta+\theta)-(\beta-\theta)}{2}\right]}$$

$$E = \frac{2\cos\alpha sen\theta}{2sen\beta sen\theta} = \frac{\cos\alpha}{sen\beta}$$

$\therefore\ E = \cos\alpha\csc\beta$

4 Expresa como el producto de dos senos la siguiente expresión:
$R = sen^2\alpha - sen^2\theta$

Resolución:

Recordemos:

$$sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow sen^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

En R tenemos:

$$R = \frac{1-\cos2\alpha}{2} - \frac{1-\cos2\theta}{2}$$

$$R = \frac{\cos2\theta - \cos2\alpha}{2}$$

$$R = \frac{\cancel{2}sen\left(\frac{2\alpha+2\theta}{2}\right)sen\left(\frac{2\alpha-2\theta}{2}\right)}{\cancel{2}}$$

$R = sen(\alpha+\theta)sen(\alpha-\theta)$

5 Halla el equivalente de:

$$S = \frac{senx + seny}{\cos x + \cos y}$$

Si: x + y = 30°

Resolución:

Empleamos las fórmulas de transformación:

$$S = \frac{2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$S = \frac{sen\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Como: $x + y = 30°$

$\Rightarrow\ S = \tan15°$

$$S = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ S = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}$$

6 Reduce:

$$S = \cos\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} - sen\frac{9x}{2}sen\frac{x}{2}$$

Si: $x = \frac{\pi}{10}$

Resolución:

Multiplicamos S por 2:

$$2S = 2\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} - 2sen\frac{9x}{2}sen\frac{x}{2}$$

Aplicando las fórmulas de transformación de un producto, tenemos:

$$2S = \cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{3x}{2}\right)+\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{3x}{2}\right)$$
$$-\left[\cos\left(\frac{9x}{2}-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+\frac{x}{2}\right)\right]$$

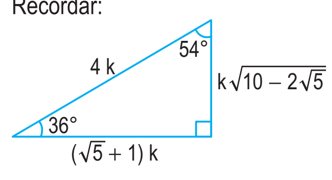
$2S = \cos5x + \cos2x - \cos4x + \cos5x$

$2S = 2\cos5x + \cos2x - \cos4x$

Como $x = \dfrac{\pi}{10}$:

$$\Rightarrow 2S = \underbrace{2\cos\overbrace{\frac{5\pi}{10}}^{90°}}_{0} + \cos\overbrace{\frac{2\pi}{10}}^{36°} - \cos\overbrace{\frac{4\pi}{10}}^{72°}$$

Recordar:



$$\cos\frac{2\pi}{10} = \cos36° = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Por ángulo doble:

$$\cos\frac{4\pi}{10} = \cos72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Reemplazando:

$$2S = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = \frac{1}{4}$$

7 Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{\text{sen}x - \text{sen}2x + \text{sen}3x}{\cos x - \cos2x + \cos3x} = \tan2x$$

Resolución:

Agrupando convenientemente:

$$\frac{\text{sen}3x + \text{sen}x - \text{sen}2x}{\cos3x + \cos x - \cos2x} = \tan2x$$

Transformando a producto:

$$\frac{2\text{sen}2x\cos x - \text{sen}2x}{2\cos2x\cos x - \cos2x} = \tan2x$$

Factorizando:

$$\frac{\text{sen}2x(2\cos x - 1)}{\cos2x(2\cos x - 1)} = \tan2x$$

$$\Rightarrow \frac{\text{sen}2x}{\cos2x} = \tan2x$$

$$\therefore \tan2x = \tan2x$$

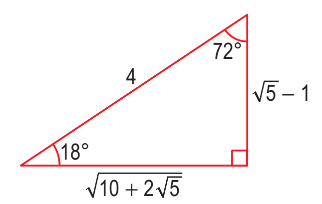
8 Calcula:
$E = \text{sen}6°\,\text{sen}42°\,\text{sen}66°\,\text{sen}78°$

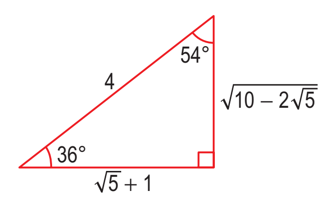
Resolución:

Agrupando convenientemente:

$$E = \frac{1}{4}[2\text{sen}66°\text{sen}6°][2\text{sen}78°\text{sen}42°]$$

$$E = \frac{1}{4}[\cos60° - \cos72°][\cos36° - \cos120°]$$





$$\Rightarrow E = \frac{1}{4}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$$

$$\therefore E = \frac{1}{16}$$

9 Calcula:
$Q = \text{sen}\dfrac{\pi}{15} + \text{sen}\dfrac{5\pi}{15} + \text{sen}\dfrac{9\pi}{15} + ... + \text{sen}\dfrac{33\pi}{15}$

Resolución:

Razón de la progresión: $r = \dfrac{4\pi}{15}$

Números de términos:

$$n = \frac{U-P}{\text{Razón}} + 1 \Rightarrow n = \frac{\frac{33\pi}{15} - \frac{\pi}{15}}{\frac{4\pi}{15}} + 1 \Rightarrow n = 9$$

$$Q = \frac{\text{sen}\left(\frac{9}{2}\times\frac{4\pi}{15}\right)}{\text{sen}\left(\frac{4\pi}{30}\right)}\,\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{15}+\frac{33\pi}{15}}{2}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{18\pi}{15}\right)}{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{15}\right)}\,\text{sen}\left(\frac{17\pi}{15}\right)$$

Pero: $^*\text{sen}\dfrac{18\pi}{15} = \text{sen}\left(\pi + \dfrac{3\pi}{15}\right) = -\text{sen}\dfrac{3\pi}{15} = -\text{sen}\dfrac{\pi}{5}$

$^*\text{sen}\dfrac{17\pi}{15} = \text{sen}\left(\pi + \dfrac{2\pi}{15}\right) = -\text{sen}\dfrac{2\pi}{15}$

Reemplazamos:

$$Q = \frac{\left(-\text{sen}\frac{\pi}{5}\right)\left(-\text{sen}\frac{2\pi}{15}\right)}{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{15}\right)} \Rightarrow Q = \text{sen}\frac{\pi}{5}$$

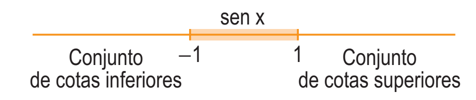
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

CONCEPTOS PREVIOS

Función acotada

Una función f es acotada, si $\exists\ M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que: $|f(x)| \leq M\ ;\ \forall\ x \in$ Domf

Ejemplo:
La función $f(x) = \text{sen}x$ es acotada, ya que $|\text{sen}x| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$



Función par

Una función f es par si $\forall\ x \in$ Domf cumple:

$$f(-x) = f(x) \wedge -x \in \text{Domf}$$

Ejemplo:
¿Es $f(x)= x^2 - 5$ una función par?

Resolución:
$f(-x) = (-x)^2 - 5$
$= x^2 - 5$
$= f(x)$
$\therefore$ f(x) es una función par

Función impar

Una función f es impar si: $\forall\ x \in$ Domf cumple:

$$f(-x) = -f(x) \wedge -x \in \text{Domf}$$

Ejemplo:
¿Es $f(x) = x^3 - 2x$ una función impar?

Resolución:
$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$
$= -x^3 + 2x$
$= -(x^3 - 2x)$
$= -f(x)$
$\therefore$ f(x) es una función impar

Función creciente

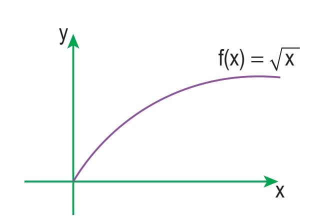
Una función f es creciente en un intervalo I de su dominio, si para todo par de números x_1; x_2 que pertenecen a dicho intervalo se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Ejemplo:

¿Es creciente la función $f(x) = \sqrt{x}$?

Resolución:
Gráficamente observamos que la función **f** es creciente $\forall\ x \in$ Domf.



Función decreciente

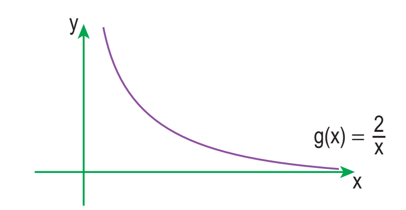
Una función f es decreciente en un intervalo I de su dominio, si para todo par de números x_1, x_2 que pertenecen a dicho intervalo se cumple:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Ejemplo:

¿Es decreciente la función $g(x) = \dfrac{2}{x}$; $x > 0$?

Resolución:
Gráficamente observamos que la función **g** es decreciente $\forall\ x > 0$.



Función periódica

Una función f es periódica, si existe un número real $T \neq 0$, tal que $\forall\ x \in$ Domf se cumple:

$$f(x + T) = f(x) \wedge (x + T) \in \text{Domf}$$

Ejemplo:
Halla el período principal de: $f(x) = \cos x$

Resolución:

$f(x + T) = \cos(x + T)$
$\cos(x + T) = \cos x$
$\cos x \,.\, \cos T - \text{sen}x \,.\, \text{sen}T = \cos x$
Hacemos: $\cos T = 1$; $\text{sen}T = 0$

$\Rightarrow T = 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}^+$
$T = 2\pi;\ 4\pi;\ 6\pi;\ ...$

$\therefore$ El período principal de la función $f(x) = \cos x$ es 2π.

Observación

- La gráfica de una función par, es simétrica respecto al eje y.

  (y, x, −3, −2, −1, O, 1, 2, 3, −5)

- La gráfica de una función impar, es simétrica respecto al origen.

  (y, x, −3, −2, −1, O, 1, 2, 3)

Observación

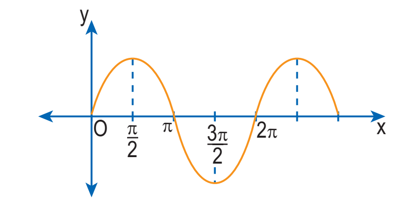
El número **T** se denomina período principal si es positivo y mínimo entre todos los períodos positivos.



ESTUDIO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

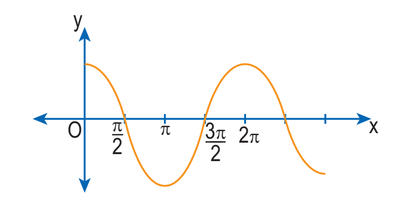
Función seno

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \text{sen}x;\ x \in \mathbb{R}\}$



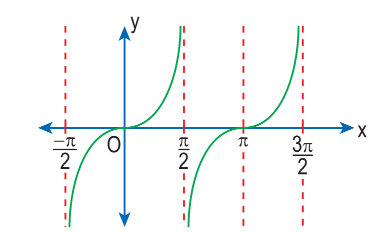
Función coseno

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \cos x;\ x \in \mathbb{R}\}$



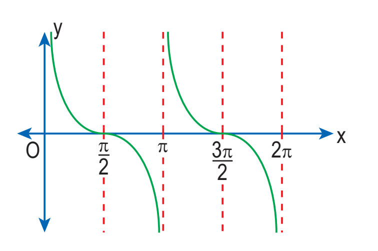
Función tangente

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}\},\ n \in \mathbb{Z}\}$



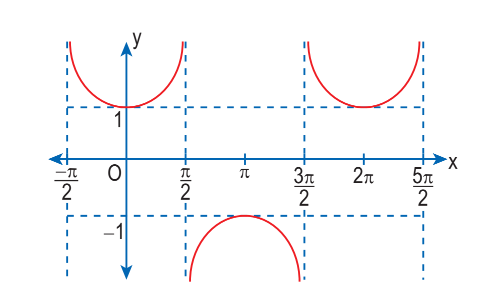
Función cotangente

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} - \{n\pi\},\ n \in \mathbb{Z}\}$



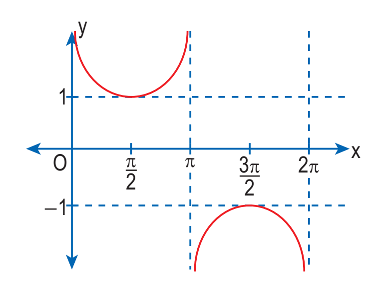
Función secante

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \sec x;\ x \in \mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}\},\ n \in \mathbb{Z}\}$



Función cosecante

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = \csc x;\ x \in \mathbb{R} - \{n\pi\};\ n \in \mathbb{Z}\}$



Observación

Función seno

Dominio : $\mathbb{R}$
Rango : $[-1; 1]$
Período : 2π
Función impar : $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$

Función coseno

Dominio : $\mathbb{R}$
Rango : $[-1; 1]$
Período : 2π
Función par : $\cos(-x) = \cos x$

Función tangente

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}, n \in \mathbb{Z}$
Rango : $\mathbb{R}$
Período : π
Función impar : $\tan(-x) = -\tan x$

Función cotangente

Dominio: $\mathbb{R} - \{n\pi\};\ n \in \mathbb{Z}$
Rango : $\mathbb{R}$
Período : π
Función impar : $\cot(-x) = -\cot x$

Función secante

Dominio : $\mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}, n \in \mathbb{Z}$
Rango : $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
Período : 2π
Función par : $\sec(-x) = \sec x$

Función cosecante

Dominio : $\mathbb{R} - \{n\pi\};\ n \in \mathbb{Z}$
Rango : $\langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
Período : 2π
Función impar : $\csc(-x) = -\csc x$

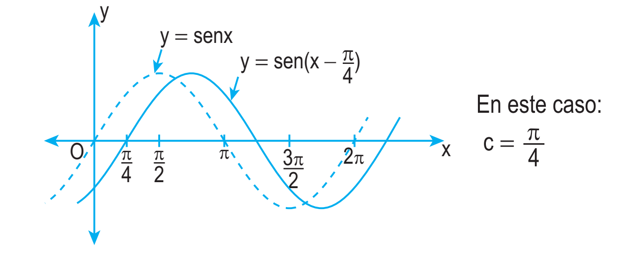
REGLAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS

Desplazamiento horizontal

Sea la gráfica de la función $y = f(x)$, para construir la gráfica de la función $f(x - c)$ es necesario desplazar la gráfica de f en $|c|$ unidades, a lo largo del eje de las abscisas.

- A la derecha, si $c > 0$
- A la izquierda, si $c < 0$

Ejemplo:



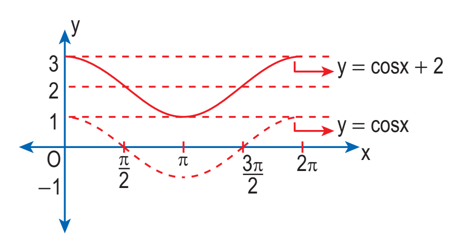
En este caso: $c = \frac{\pi}{4}$

Desplazamiento vertical

Sea la gráfica de la función $y = f(x)$, para construir la gráfica de la función $f(x) + c$ es necesario desplazar la gráfica de f en $|c|$ unidades, a lo largo del eje de las ordenadas.

- Hacia arriba, si $c > 0$
- Hacia abajo, si $c < 0$

Ejemplo:



En este caso:
$c = 2$

Nota

La amplitud de una función periódica con valor máximo M y valor mínimo m es:

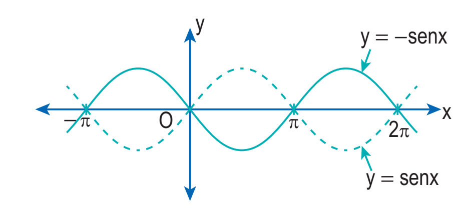
$$\frac{1}{2}(M - m)$$

Ejemplo:
Sea: $y = \text{sen}x$
$m = -1$; $M = 1$
$\therefore$ Amplitud $= \frac{1}{2}(1 - (-1)) = 1$

Opuesto de una función

Sea la gráfica de la función $y = f(x)$, para construir la gráfica de la función $y = -f(x)$ es necesario reflejar en forma simétrica la gráfica de f con respecto al eje de las abscisas.

Ejemplo:



Observación

En general, el período de cualquier función de la forma: $y = A\text{sen}Bx$ o $y = A\cos Bx$; donde $B > 0$, es:

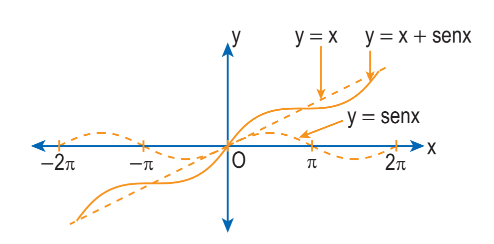
$T = \frac{2\pi}{B}$



Suma de funciones

Sean las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, para construir la gráfica de la función $y = f(x) + g(x)$ es necesario sumar los valores correspondientes de las ordenadas de $f(x)$ y $g(x)$.

Ejemplo:



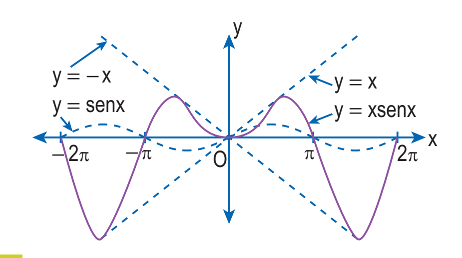
Recuerda

Función	Período
senBx; cosBx secBx, cscBx	$\frac{2\pi}{B}$
tanBx; cotBx	$\frac{\pi}{B}$

Producto de funciones

Sean las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, para construir la gráfica de la función $y = f(x).\,g(x)$ es necesario multiplicar los valores correspondientes de las ordenadas de $f(x)$ y $g(x)$.

Ejemplo:



EFECTUAR



1. Halla el dominio de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = \csc x + \tan x$
   b) $f(x) = \sqrt{x + \text{sen}x}$
   c) $f(x) \dfrac{\csc x}{\sqrt{1 - 2|\cos x|}}$
   d) $f(x) = \cot(\pi \text{sen}x)$

2. Halla el rango de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = x + 2\sec^2 x$; $x \in [0;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
   b) $f(x) = [\![\cos x + 4]\!]$
   c) $f(x) = \text{sen}(\ln x)$
   d) $f(x) = |\csc x\,\text{sen}x\cos 3x|$

Problemas resueltos

1 Halla el dominio y rango de:
$f(x) = 5\cot\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

Resolución:

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Rightarrow \frac{x}{2} \neq k\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$

$\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$

2 Halla el dominio y rango de:
$g(x) = 4\cos 2x + 9$

Resolución:
Teniendo como referencia el dominio y rango de la función básica:

$y = \text{sen}x$: $\text{Dom}(\text{sen}x) = \mathbb{R}$; $\text{Ran}(\text{sen}x) = [-1; 1]$

Entonces: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (2x) \in \mathbb{R}$
Luego: $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$

Como en el dominio no hay restricciones:
$-1 \leq \cos 2x \leq 1$
$-4 \leq 4\cos 2x \leq 4$
$5 \leq \underbrace{4\cos 2x + 9}_{} \leq 13$
$5 \leq g(x) \leq 13$

Entonces: $\text{Ran}(g) = [5; 13]$
$\therefore \text{Dom}(g) = \mathbb{R} \wedge \text{Ran}(g) = [5; 13]$

3 Halla el rango de la función:
$h(x) = \text{sen}^2x + 2\text{sen}x + 1$

Resolución:
La función h(x) está definida $\forall$ $x \in \mathbb{R}$, no es necesario hacer alguna restricción.

Buscamos que h(x) presente un solo operador trigonométrico:
$h(x) = \text{sen}^2x + 2\text{sen}x + 1 = (\text{sen}x + 1)^2$ ...(1)

A continuación tomaremos la expresión (1) a partir del dominio.

Como $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow -1 \leq \text{sen}x \leq 1$
$-1 + (1) \leq \text{sen}x + (1) \leq 1 + (1)$
$0 \leq \text{sen}x + 1 \leq 2$

Elevando al cuadrado:
$0 \leq \underbrace{(\text{sen}x + 1)^2}_{} \leq 4$
$0 \leq h(x) \leq 4$

Por lo tanto, el $\text{Ran}(h) = [0; 4]$

4 Determina el dominio de la siguiente función:
$f(x) = \frac{\cos x}{1 - \text{sen}x}$

Resolución:
El dominio de cosx no presentan restricción, pero f(x) por ser una fracción, su denominador no puede ser cero, entonces:
$1 - \text{sen}x \neq 0 \Rightarrow \text{sen}x \neq 1$
$\Rightarrow x \neq \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; ...\right\}$ $\Rightarrow$ $x \neq (4k + 1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$
$\therefore \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{(4k + 1)\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$

5 Determina el dominio y rango de:
$g(x) = 5\sec(x - \frac{\pi}{4}) + 1$

Resolución:
Función de referencia: $y = \sec x$
$\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{(2n + 1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$
$\text{Ran } y = \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$
Para el domino de g(x):
$x - \frac{\pi}{4} \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
$\Rightarrow x \neq \frac{2n\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x \neq n\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{4n\pi + 3\pi}{4}$
$\Rightarrow x \neq (4n + 3)\frac{\pi}{4}$
Luego: $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{(4n + 3)\frac{\pi}{4} / n \in \mathbb{Z}\}$
Para el rango de g(x):
$\sec(x - \frac{\pi}{4}) \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$
$5\sec(x - \frac{\pi}{4}) \in \mathbb{R} - \langle -5; 5\rangle$
$5\sec(x - \frac{\pi}{4}) + 1 \in \mathbb{R} - \langle -4; 6\rangle$
Luego: $\text{Ran}(g) \in \mathbb{R} - \langle -4; 6\rangle$

6 Halla el dominio y rango de la función:
$f(x) = 7\tan(2x - \frac{\pi}{3}) + 3$

Resolución:
Función de referencia: $y = \tan x$
$\text{Dom}(\tan x) = \mathbb{R} - \{(2n + 1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$
$\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow 2x \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$
$2x \neq n\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x \neq \frac{n\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}$
Luego: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
$\text{Ran}(\tan x) = \mathbb{R}$
Luego, a partir del dominio obtenemos:
$-\infty < \tan(2x - \frac{\pi}{3}) < +\infty$
$-\infty < \underbrace{7\tan(2x - \frac{\pi}{3}) + 3}_{} < +\infty$
$-\infty < f(x) < +\infty$
Entonces: $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$
$\therefore \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2} + \frac{5\pi}{12} / n \in \mathbb{Z}\right\} \wedge \text{Ran}(f) = \mathbb{R}$





FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Debemos recordar que todas las funciones trigonométricas son funciones periódicas, es decir, ninguna de estas funciones tiene inversa.

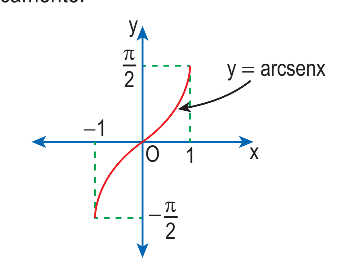
Esto se comprueba ya que podemos obtener diferentes valores de ángulos que tienen el mismo valor del seno, coseno, tangente, etc.

Sin embargo, si restringiendo el dominio de cada una de estas funciones podemos hallar la inversa.
A continuación detallaremos cada una de las funciones trigonométricas inversas.

FUNCIÓN SENO INVERSO O ARCO SENO (y = arcsenx)

La función inversa del senx es arcsenx. La función es creciente en todo su dominoo y es impar: $\text{arcsen}(-x) = -\text{arcsenx}$

Gráficamente:

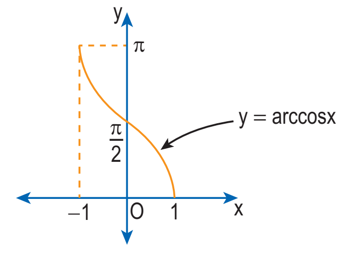


f	f*
$y = f(x) = \text{senx}$ $\text{Dom}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\text{Ran}(f) = [-1; 1]$	$y = f^*(x) = \text{arcsenx}$ $\text{Dom}(f^*) = [-1; 1]$ $\text{Ran}(f^*) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

FUNCIÓN COSENO INVERSO O ARCO COSENO (y = arccosx)

La función inversa del cosx es arccosx. Es una función decreciente en todo su dominio. No es par ni impar.

Gráficamente:



f	f*
$y = f(x) = \cos x$ $\text{Dom}(f) = [0; \pi]$ $\text{Ran}(f) = [-1; 1]$	$y = f^*(x) = \text{arccosx}$ $\text{Dom}(f^*) = [-1; 1]$ $\text{Ran}(f^*) = [0; \pi]$

Ejemplos:
Halla el valor de cada una de las siguientes expresiones:

1. $\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

   Sea: $\theta = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

   $\Rightarrow \theta \in [-\pi/2; \pi/2]$; $\text{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ $\therefore \theta = -\pi/6$

2. $\text{arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

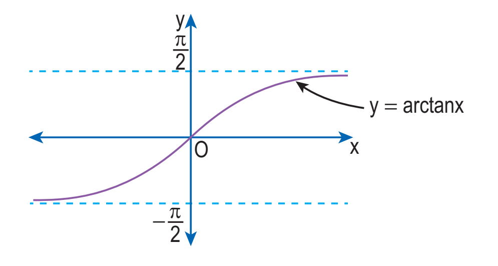
   Sea: $\alpha = \text{arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   $\Rightarrow \alpha \in [0; \pi]$; $\cos\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\therefore \theta = \pi/4$

FUNCIÓN TANGENTE INVERSA O ARCO TANGENTE (y = arctanx)

La función inversa de tanx es arctanx. La función es creciente en todo su dominio y es impar: $\text{arctan}(-x) = -\text{arctanx}$

Gráficamente:



f	f*
$y = f(x) = \tan x$ $\text{Dom}(f) = \left\langle-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ $\text{Ran}(f) = \langle-\infty; +\infty\rangle$	$y = f^*(x) = \text{arctanx}$ $\text{Dom}(f^*) = \langle-\infty; +\infty\rangle$ $\text{Ran}(f^*) = \left\langle-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Observación

Definimos la siguiente función:

$f: A \rightarrow B$

- La función es inyectiva cuando cada elemento del rango tiene un único valor en el dominio. Es decir: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- La función es sobreyectiva, si y solo si, para todo $y \in B$, existe por lo menos un $x \in A$, tal que: $f(x) = y$



Importante

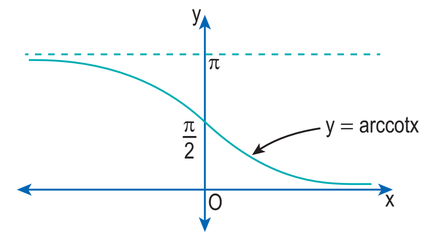
Una función es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva.



FUNCIÓN COTANGENTE INVERSA O ARCO COTANGENTE (y = arccotx)

La función inversa de cotx es arccotx. La función es decreciente en todo su dominio. No es par ni impar.

Gráficamente:



f	f*
$y = f(x) = \cot x$ $Dom(f) = \langle 0; \pi\rangle$ $Ran(f) = \langle -\infty; +\infty\rangle$	$y = f^*(x) = \text{arccot}x$ $Dom(f^*) = \langle -\infty; +\infty\rangle$ $Ran(f^*) = \langle 0; \pi\rangle$

Nota

Hay diversas maneras de denotar su función inversa, por ejemplo:

$y = \arcsin x$ o $y = \text{sen}^{-1}x$

Se lee: "y es un arco cuyo seno es x"

Ejemplos:

- $\arctan(-1)$

  Sea: $\beta = \arctan(-1)$

  $\Rightarrow \beta \in \langle -\pi/2; \pi/2\rangle; \tan\beta = -1$

  $\therefore \beta = -\pi/4$

- $\text{arccot}(2+\sqrt{3})$

  Sea: $\alpha = \text{arccot}(2+\sqrt{3})$

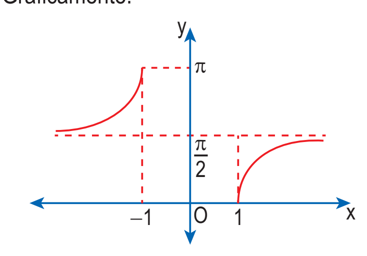
  $\Rightarrow \alpha \in \langle 0; \pi\rangle; \cot\alpha = 2+\sqrt{3}$

  $\therefore \alpha = \pi/12$

FUNCIÓN SECANTE INVERSA O ARCO SECANTE (y = arcsecx)

La función inversa de secx es arcsecx. La función es creciente. No es par ni impar.

Gráficamente:



f	f*
$y = f(x) = \sec x$ $Dom(f) = [0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ $Ran(f) = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$	$y = f^*(x) = \text{arcsec}x$ $Dom(f^*) = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$ $Ran(f^*) = [0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$



Observación

Para las siguientes funciones inversas se cumple:

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

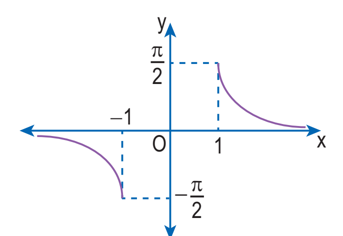
$\text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot}x$

$\text{arcsec}(-x) = \pi - \text{arcsec}x$

FUNCIÓN COSECANTE INVERSA O ARCO COSECANTE (y = arccscx)

La inversa de cscx es arccscx. La función es decreciente y es impar: $\text{arccsc}(-x) = -\text{arccsc}x$

Gráficamente:



f	f*
$y = f(x) = \csc x$ $Dom(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ $Ran(f) = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$	$y = f^*(x) = \text{arccsc}x$ $Dom(f^*) = \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$ $Ran(f^*) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

Ejemplos:

- arcsec2

  Sea: $\theta = \text{arcsec}2$

  $\Rightarrow \theta \in [0; \pi] - \{\pi/2\}; \sec\theta = 2$

  $\therefore \theta = \pi/3$

- $\text{arccsc}(-\sqrt{2})$

  Sea: $\phi = \text{arccsc}(-\sqrt{2})$

  $\Rightarrow \phi \in [-\pi/2; \pi/2] - \{0\};$

  $\csc\phi = -\sqrt{2}$

  $\therefore \phi = -\pi/4$

Nota

Propiedad:

$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$

Donde:

Si: $xy < 1 \Rightarrow k = 0$

Si: $xy > 1$ y $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow k = 1$

Si: $xy > 1$ y $x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow k = -1$

Propiedades:

1. $FT[arcFT(x)] = x; \forall x \in Dom(arcFT)$

   Es decir:

   - $\text{sen}[\arcsin(x)] = x; \forall x \in [-1; 1]$
   - $\cos[\arccos(x)] = x; \forall x \in [-1; 1]$
   - $\tan[\arctan(x)] = x; \forall x \in \mathbb{R}$
   - $\cot[\text{arccot}(x)] = x; \forall x \in \mathbb{R}$
   - $\sec[\text{arcsec}(x)] = x; \forall x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$
   - $\csc[\text{arccsc}(x)] = x; \forall x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$

2. $arcFT[FT(x)] = x; \forall x \in Ran(arcFT)$

   Es decir:

   - $\arcsin(\text{sen}x) = x; \forall x \in [-\pi/2; \pi/2]$
   - $\arccos(\cos x) = x; \forall x \in [0; \pi]$
   - $\arctan(\tan x) = x; \forall x \in \langle -\pi/2; \pi/2\rangle$
   - $\text{arccot}(\cot x) = x; \forall x \in \langle 0; \pi\rangle$
   - $\text{arcsec}(\sec x) = x; \forall x \in [0; \pi] - \{\pi/2\}$
   - $\text{arccsc}(\csc x) = x; \forall x \in [-\pi/2; \pi/2] - \{0\}$

Problemas resueltos

1 Halla dominio y rango de la siguiente FT:
F(x) = 2arcsen4x

Resolución:

Para el dominio:

$-1 \leq 4x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$

$\therefore$ DomF = $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$

Para el rango:

$-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}4x \leq \frac{\pi}{2}$

$-\pi \leq \underbrace{2\text{arcsen}4x}_{F(x)} \leq \pi$

$\therefore$ RanF = $[-\pi; \pi]$

2 Reduce:
$k = \text{sen}^2(\text{arccos}\,\frac{1}{3})$

Resolución:

Sea: $\text{arccos}\frac{1}{3} = \theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$

Luego:

$k = \text{sen}^2\theta$

Por identidades:

$k = 1 - \cos^2\theta$

$k = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$k = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

3 Calcula:
$M = \sec\left[\arctan\left(2\cos\left(2\text{arcsen}\frac{1}{2}\right)\right)\right]$

Resolución:

Empezaremos a trabajar desde la parte interna hacia afuera.

$\text{arcsen}\frac{1}{2} = \beta \Rightarrow \text{sen}\beta = \frac{1}{2}; \beta = \frac{\pi}{6}$

Reemplazamos:

$M = \sec\left[\arctan\left(2\cos\left(2.\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]$

$M = \sec\left[\arctan\left(2\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}}\right)\right]$

$M = \sec[\arctan 1]$

Luego:

$\arctan 1 = \theta \Rightarrow \tan\theta = 1;\ \theta = \frac{\pi}{4}$

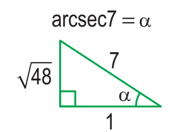
$M = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

4 Calcula:
$P = \frac{5}{12}\tan^2(\text{arcsec}7) + \frac{2}{9}\cot^2(\text{arccsc}8)$

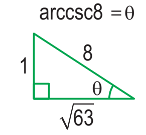
Resolución:

Del enunciado tenemos:

arcsec7 = α



arccsc8 = θ



Luego:

$P = \frac{5}{12}\tan^2(\arctan\sqrt{48}) + \frac{2}{9}\cot^2(\text{arccot}\sqrt{63})$

Por propiedad sabemos que:

tan(arctanx) = x

cot(arccotx) = x

Aplicando esta propiedad tenemos:

$P = \frac{5}{12}(\sqrt{48})^2 + \frac{2}{9}(\sqrt{63})^2$

$P = 20 + 14 = 34$

5 Calcula:
$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{3}{8}\right) + \text{arccos}\left(\frac{3}{8}\right) + \arctan\sqrt{3}$

Resolución:

$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{3}{8}\right) + \text{arccos}\left(\frac{3}{8}\right) + \arctan\sqrt{3}$

Por propiedad:

$\text{arcsenx} + \text{arccosx} = \frac{\pi}{2};\ \forall\ x \in [-1; 1]$

Como: $\frac{3}{8} \in [-1; 1]$

$\Rightarrow \text{arcsen}\left(\frac{3}{8}\right) + \text{arccos}\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{\pi}{2}$

Además: $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

Reemplazando tenemos:

$\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$

6 Calcula:
$E = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{2}{3} - \arctan\frac{1}{8}$

Resolución:

Por propiedad:

$$E = \underbrace{\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{2}{3}} - \arctan\frac{1}{8}$$

$$E = \arctan\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}\right) - \arctan\frac{1}{8}$$

$$E = \underbrace{\arctan\frac{9}{7} - \arctan\frac{1}{8}}$$

$$E = \arctan\left(\frac{\frac{9}{7}-\frac{1}{8}}{1+\frac{9}{7}\cdot\frac{1}{8}}\right)$$

$\Rightarrow E = \arctan 1$

$\therefore E = 45°$

7 Calcula:

$H = \sec\left\{\arctan\left[2\cos\left(2\arcsen\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$

Resolución:

$$H = \sec\left\{\arctan\left[2\cos\left(2\underbrace{\arcsen\frac{1}{2}}_{30°}\right)\right]\right\}$$

$H = \sec\{\arctan[2\cos(2\ .\ 30°)]\}$

$$H = \sec\{\arctan[2\underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}}]\}$$

$$H = \sec\{\underbrace{\arctan 1}_{45°}\}$$

$\therefore\ H = \sec 45° = \sqrt{2}$

8 Calcula: $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arccot} 3\right)$

Resolución:

$M = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arccot} 3\right)$; sabemos que:

Entonces:

$$M = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan(\operatorname{arccot} 3)}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan(\operatorname{arccot} 3)};\ \text{pero: } \operatorname{arccot}3 = \arctan\frac{1}{3}$$

$$M = \frac{1-\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)}{1+\tan\left(\arctan\frac{1}{3}\right)} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow M = \frac{1}{2}$$

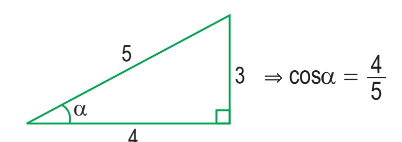
9 Calcula: $\cos\left(\arcsen\frac{3}{5} + \arcsen\frac{15}{17}\right)$

Resolución:

Sea: $M = \cos\left(\underbrace{\arcsen\frac{3}{5}}_{\alpha} + \underbrace{\arcsen\frac{15}{17}}_{\phi}\right)$

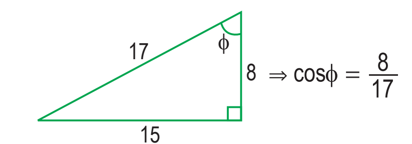
$M = \cos(\alpha + \phi) = \cos\alpha\cos\phi - \sen\alpha\sen\phi$ ...(1)

$\alpha = \arcsen\frac{3}{5} \Rightarrow \sen\alpha = \frac{3}{5}$



$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\phi = \arcsen\frac{15}{17} \Rightarrow \sen\phi = \frac{15}{17}$



$\Rightarrow \cos\phi = \frac{8}{17}$

Reemplazamos en (1):

$$M = \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{17}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{15}{17}\right) = \frac{32}{85} - \frac{45}{85} \Rightarrow M = -\frac{13}{85}$$

10 Calcula el valor de:

$\theta = \arccos(-1)^n - \arcsen(-1)^n - \operatorname{arccot}(-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Resolución:

En estos casos se analizan dos posibilidades.

1.° Si n es par, entonces $(-1)^n = 1$, luego:

$$\theta = \underbrace{\arccos(1)}_{0} - \underbrace{\arcsen(1)}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\operatorname{arccot}(1)}_{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \theta = 0 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

2.° Si n es impar entonces $(-1)^n = -1$, luego:

$$\theta = \underbrace{\arccos(-1)}_{\pi} - \underbrace{\arcsen(-1)}_{-\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\operatorname{arccot}(-1)}_{\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Observamos que:

Si n es par, entonces: $\theta = -\frac{3\pi}{4}$

Si n es impar, entonces: $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Entonces: $\theta = \frac{(-1)^{n+1}3\pi}{4};\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICIÓN

Son igualdades condicionales donde la variable (x) o arcos de la forma (ax + b) se encuentran afectados de algún operador trigonométrico como seno, coseno, tangente, etc.

Ejemplos:

- $\text{sen}2x = \frac{1}{2}$
- $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$
- $\text{sen}x + \cos 2x = 1$
- $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan x + \tan 2x = 0$
- $\tan^2 2x + 1 = 2\sec^2 x + \tan x$

Nota

Una ecuación no es trigonométrica si la variable incógnita "x" se encuentra dentro del operador trigonométrico y fuera de él.

Ejemplo:

- $\tan 3x = 2x - 1$
- $\tan^2 x = x^2 - 1$
- $1 + \cos 2x = \pi x$
- $x + \text{sen}x = \pi$

ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL

Es de la forma: $FT(ax + b) = N$

Donde:

a, b son constantes con a ≠ 0 y FT es cualquiera de las seis funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante o cosecante). Además N es un valor admisible.

Forma inversa: $VP = \text{arc}FT(N)$

Donde VP es el valor principal del ángulo (ax + b) definido en el rango de la función trigonométrica inversa.

Ejemplos:

- $\text{sen}2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow VP = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$
- $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow VP = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
- $\tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow VP = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$
- $\cot(\pi x) = 3 \Rightarrow VP = \text{arccot}(3)$
- $\sec\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -5 \Rightarrow VP = \text{arcsec}(-5)$
- $\csc\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \Rightarrow VP = \text{arccsc}(2) = \frac{\pi}{6}$

Nota

Para resolver este tipo de ecuaciones es indispensable recordar el valor de las razones trigonométricas (RT) de ángulos notables, los signos de las funciones trigonométricas (FT), la periodicidad, y otros conceptos vistos en capítulos anteriores.

Expresiones generales (x_G)

Para el seno y la cosecante:

Si: $\text{sen}x = N \Rightarrow x_G = k\pi + (-1)^k VP$; y si: $\csc x = N \Rightarrow x_G = k\pi + (-1)^k VP$; $\forall k \in \mathbb{Z}$

Para el coseno y secante:

Si: $\cos x = N \Rightarrow x_G = 2k\pi \pm VP$; y si: $\sec x = N \Rightarrow x_G = 2k\pi \pm VP$; $\forall k \in \mathbb{Z}$

Para la tangente y cotangente:

Si: $\tan x = N \Rightarrow x_G = k\pi + VP$; y si: $\cot x = N \Rightarrow x_G = k\pi + VP$; $\forall k \in \mathbb{Z}$

Observación

Dada:

$FT(ax + b) = N$

Entonces:

$VP = \text{arc}FT(N)$

Donde:

FT	VP
sen	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
cos	$[0, \pi]$
tan	$\left\langle-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$



SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL

Se realizan los siguientes pasos:

1.° Se halla el valor principal (VP) de la ecuación trigonométrica.

2.° Se iguala el argumento a una de las expresiones generales, de donde se despeja la variable x, obteniéndose la solución general de la ecuación trigonométrica.

Ejemplos:

1. Resuelve:

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

Resolución:

$VP = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Luego:

$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$

2. Resuelve:

$\tan\frac{5x}{2} = 1$

Resolución:

$VP = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Luego:

$\frac{5x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}; k \in \mathbb{Z}$

SISTEMA DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Un sistema de ecuaciones trigonométricas está formado por varias ecuaciones donde por lo menos una de ellas es trigonométrica y las demás algebraicas.

Ejemplos:

1. $\begin{cases} \text{senx} - \text{seny} = \frac{1}{2} \\ \text{cosx} + \text{cosy} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \text{tanx} + \text{tany} = 2 \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \text{tanxtanz} = 3 \\ \text{tanytanz} = 6 \\ x + y + z = \pi \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \text{senx} + \text{seny} = \frac{3}{2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} \text{sen}^2x + \cos^2y = \frac{3}{4} \\ \cos^2x - \text{sen}^2y = \frac{1}{4} \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \text{sen2x} + \text{seny} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$



Observación

- Se llama solución principal (Sp) al menor valor que satisface la igualdad original.
- Se llama solución general (Sg) a la reunión de todos los valores angulares que hacen posible la igualdad original.

Atención

Así como en las ecuaciones trigonométricas elementales no hay métodos, para resolver un sistema de ecuaciones trigonométricas, solo es necesario recordar diversas identidades trigonométricas vistas anteriormente.



Ejemplos de aplicación

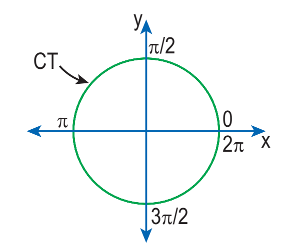
1. Resuelve e indica el conjunto solución de
sen5x + senx = sen3x

Resolución:
Transformamos la ecuación:
sen5x + senx = sen3x
2sen3xcos2x = sen3x
2sen3xcos2x − sen3x = 0
sen3x(2cos2x − 1) = 0
Si: sen3x = 0, entonces:
$VP = 0 \Rightarrow 3x = n\pi + (-1)^nVP$
$x = \frac{n\pi}{3}$
Luego: $CS_1 = \left\{x/x = \frac{n\pi}{3}\right\}; n \in \mathbb{Z}$
Si: 2cos2x − 1 = 0
2cos2x = 1 ⇒ cos2x = 1/2
$VP = \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2n\pi \pm VP$
$x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$
Luego: $CS_2 = \left\{x/x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}\right\}; n \in \mathbb{Z}$
Finalmente:
$CS = CS_1 \cup CS_2$
$CS = \left\{x/x = \frac{n\pi}{3} \vee x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}\right\} \forall n \in \mathbb{Z}$

2. Halla la solución general de:
$\cot\frac{x}{2} = \text{senx} + \text{cotx}$

Resolución:
Tenemos:
$\cot\frac{x}{2} = \text{senx} + \text{cotx}$
Por propiedad: $\cot\frac{x}{2} = \text{cscx} + \text{cotx}$
Entonces:
cscx + cotx = senx + cotx
Simplificamos:
$\text{cscx} = \text{senx} \Rightarrow \frac{1}{\text{senx}} = \text{senx}$
$\Rightarrow \text{sen}^2x = 1$

De donde:
$1 - \text{sen}^2x = 0 \Rightarrow \cos^2x = 0$
$\Rightarrow \text{cosx} = 0$



Con la circunferencia trigonométrica:
$x = \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}; k \in \mathbb{Z}$

3. Halla la solución general de la siguiente ecuación trigonométrica:
$\tan^2x + 2\text{tanx} - 1 = 0$

Resolución:
De la ecuación tenemos:
$\tan^2x + 2\text{tanx} - 1 = 0$
$2\text{tanx} = 1 - \tan^2x$
$\frac{2\tan x}{1 - \tan^2x} = 1$
Por ángulo doble de la función tangente:
tan2x = 1
Aplicamos la solución general para la tangente:
$2x = k\pi + VP$
$x = \frac{k\pi + \arctan(1)}{2}$
$x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2}$
$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
$x = \left\{\left(\frac{4k+1}{8}\right)\pi\right\}; k \in \mathbb{Z}$

Problemas resueltos

T

1 Resuelve: $2\tan x = \sec^2 x$

Resolución:

Como $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, entonces:

$$2\tan x = 1 + \tan^2 x$$
$$0 = 1 - 2\tan x + \tan^2 x$$
$$0 = (1 - \tan x)^2$$

$\Rightarrow \tan x = 1$

$VP = \frac{\pi}{4}$

Luego, la solución general será:

$x = \{k\pi + \frac{\pi}{4} / k \in \mathbb{Z}\}$

2 Halla la solución principal de: $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Resolución:

Se tiene que:

$VP = \text{arcsen}0 \Rightarrow VP = 0$

Usando la expresión general para el seno:

$x_G = k\pi + (-1)^k VP;\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x_G = k\pi + (-1)^k(0)$

$x_G = k\pi$

Luego:

$2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6};\ k \in \mathbb{Z}$ (solución general)

Si: $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ (solución principal)

3 Resuelve: $10\text{sen}^2 x - \text{sen}x = 2$

Resolución:

Factorizamos la ecuación:

$10\text{sen}^2 x - \text{sen}x - 2 = 0$

$5\text{sen}x \quad +2$

$2\text{sen}x \quad -1$

$\Rightarrow (5\text{sen}x + 2)(2\text{sen}x - 1) = 0$

De donde:

I. $5\text{sen}x + 2 = 0$

$\text{sen}x = -\frac{2}{5} \Rightarrow VP = \text{arcsen}\left(-\frac{2}{5}\right)$

$\Rightarrow x_{G_1} = k\pi + (-1)^k \text{arcsen}\left(-\frac{2}{5}\right);\ k \in \mathbb{Z}$

II. $2\text{sen}x - 1 = 0$

$\text{sen}x = \frac{1}{2} \Rightarrow VP = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x_{G_2} = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6};\ k \in \mathbb{Z}$

Finalmente, la solución de la ecuación se obtendrá haciendo:

$x = x_{G_1} \cup x_{G_2}$

$\therefore x = \{k\pi + (-1)^k \text{arcsen}\left(-\frac{2}{5}\right)\} \cup \{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}\};\ k \in \mathbb{Z}$

4 Resuelve: $2\text{sen}x - \csc x = 1$

$x \in [0; 2\pi\rangle$; e indica el número de soluciones.

Resolución:

$2\text{sen}x - \frac{1}{\text{sen}x} = 1$

$\Rightarrow 2\text{sen}^2 x - \text{sen}x - 1 = 0$

$(\text{sen}x - 1)(2\text{sen}x + 1) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}x - 1 = 0 \ \vee \ 2\text{sen}x + 1 = 0$

I. $\text{sen}x = 1 \Rightarrow VP = \frac{\pi}{2}$

$x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0; 2\pi\rangle$

II. $2\text{sen}x + 1 = 0 \Rightarrow \text{sen}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow Vp = -\frac{\pi}{6}$

$x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6}$; para que $x \in [0; 2\pi\rangle$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ Se tienen tres soluciones en $[0; 2\pi\rangle$.

5 Resuelve: $\tan^2 x = \tan x$

Resolución:

Se tiene: $\tan^2 x - \tan x = 0 \Rightarrow \tan x(\tan x - 1) = 0$

De donde:

I. $\tan x = 0$

$\Rightarrow VP = \arctan 0 = 0$

$\Rightarrow x_{G_1} = k\pi + VP$

$x_{G_1} = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

II. $\tan x - 1 = 0$

$\Rightarrow \tan x = 1$

$VP = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x_{G_2} = k\pi + VP$

$x_{G_2} = k\pi + \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}$

Luego, la solución general será: $x = x_{G_1} \cup x_{G_2}$

$\therefore x = \{k\pi\} \cup \{k\pi + \frac{\pi}{4}\};\ k \in \mathbb{Z}$

6 Halla la suma de las 3 primeras soluciones positivas de la ecuación: $\tan 6x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Resolución:

$\tan 6x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Luego: $x_G = k\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$6x = k\pi - \frac{\pi}{6}$

$x = \left\{\frac{k\pi}{6} - \frac{\pi}{36}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

Evaluando tenemos:

$k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{36} = -5°$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{36} = 25°$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{36} = 55°$

$k = 3 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{36} = 85°$

$\therefore$ Piden: $25° + 55° + 85° = 165°$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

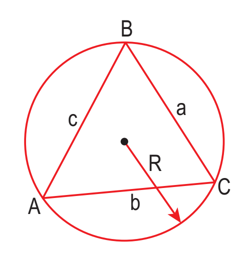
Resolver un triángulo oblicuángulo significa calcular la medida de uno de sus elementos principales.

Los elementos principales de un triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos.

Para resolver un triángulo oblicuángulo bastará conocer tres de sus elementos, uno de estos deberá ser necesariamente un lado del triángulo, y utilizaremos cuatro leyes fundamentales, que detallaremos a continuación.

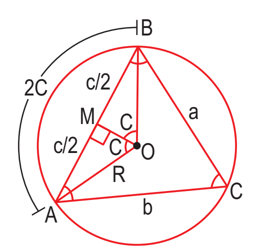
LEY DE SENOS

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{a}{\text{senA}} = \frac{b}{\text{senB}} = \frac{c}{\text{senC}} = 2R$$

Demostración:
Para la demostración consideraremos el triángulo acutángulo graficado anteriormente.



Del triángulo AMO:

$$\text{senC} = \frac{\frac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\text{senC}} = 2R$$

Seguimos el mismo procedimiento para los otros dos lados del triángulo, conseguiremos los siguientes resultados:

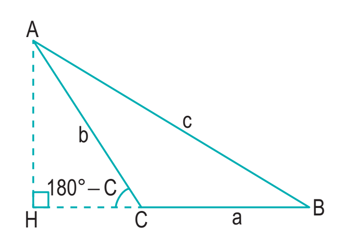
$\frac{a}{\text{senA}} = 2R \wedge \frac{b}{\text{senB}} = 2R$ Por lo tanto, queda demostrada la ley de senos.

LEY DE COSENOS

En todo triángulo se cumple que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos al doble producto de estos lados por el coseno del ángulo que forman.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $\quad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ $\quad$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

Demostración:
Para la demostración graficamos el triángulo obtusángulo ABC, además trazamos la altura AH en la prolongación de BC.



Del gráfico:

$$\text{sen}(180° - C) = \frac{AH}{b} \Rightarrow AH = b\,\text{sen}(180° - C)$$
$$\Rightarrow AH = b\,\text{senC}$$
$$\cos(180° - C) = \frac{HC}{b} \Rightarrow HC = b\cos(180° - C)$$
$$\Rightarrow HC = -b\cos C$$

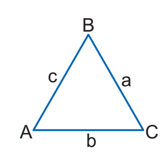
Luego, aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo AHB.

$$AB^2 = HB^2 + AH^2$$
$$c^2 = (HC + a)^2 + (b\,\text{senC})^2$$
$$c^2 = (-b\cos C + a)^2 + b^2\text{sen}^2C$$
$$c^2 = b^2\cos^2C - 2ab\cos C + a^2 + b^2\text{sen}^2C$$
$$c^2 = b^2(\cos^2C + \text{sen}^2C) + a^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

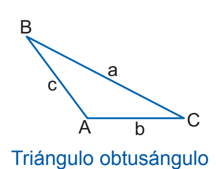
De manera análoga se realiza la demostración para los dos lados restantes.


Nota

Los triángulos oblicuángulos (oblicuos) pueden ser acutángulos u obtusángulos.



Triángulo acutángulo



Triángulo obtusángulo



Importante

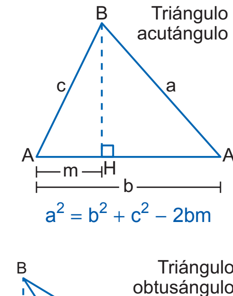
De la ley de senos tenemos:
$a = 2R\,\text{senA}$
$b = 2R\,\text{senB}$
$c = 2R\,\text{senC}$

De la ley de cosenos, podemos obtener lo siguiente:

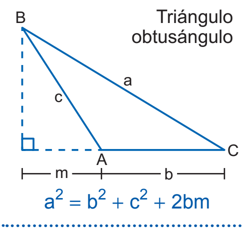
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Nota

También se puede realizar la demostración utilizando el teorema de Euclides ya sea para un triángulo acutángulo u obtusángulo:



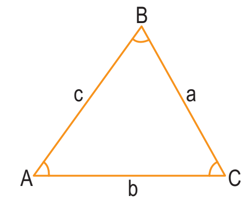
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$



$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$

LEY DE TANGENTES

En todo triángulo oblicuángulo, la diferencia de dos de sus lados es a su suma como lo tangente de la mitad de la diferencia de los ángulos opuestos a esos lados es a la tangente de la mitad de la suma de dichos ángulos; es decir:



$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{\tan\left(\frac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+C}{2}\right)} \qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)} \qquad \frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Nota

Para la demostración de la ley de tangentes se utilizó la siguiente propiedad:

$$\frac{n}{m}=\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{n+m}{n-m}=\frac{p+q}{p-q}$$

Demostración:

De la ley de senos y aplicando proporciones tenemos:

$$\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a-b}{a}=\dfrac{\text{sen}A-\text{sen}B}{\text{sen}A}\\[2mm]\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{\text{sen}A+\text{sen}B}{\text{sen}A}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}=\frac{\text{sen}A-\text{sen}B}{\text{sen}A+\text{sen}B}$$

Luego, transformamos a producto:



$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}=\frac{2\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

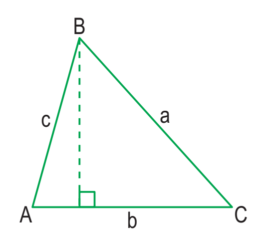
$$\frac{a-b}{a+b}=\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)\cot\left(\frac{A+B}{2}\right)=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$$

Las siguientes relaciones se comprueban de manera análoga.

LEY DE PROYECCIONES

Dado cualquier triángulo, uno de sus lados es igual a la suma de las proyecciones de los otros dos lados sobre él.



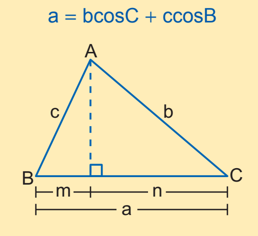
$$a = b\cos C + c\cos B \qquad b = a\cos C + c\cos A$$

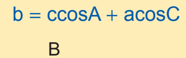
$$c = a\cos B + b\cos A$$

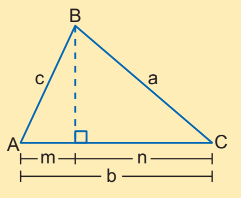
Importante

Para realizar la demostración de las demás proyecciones utilizaremos los siguientes gráficos como referencia.

$a = b\cos C + c\cos B$



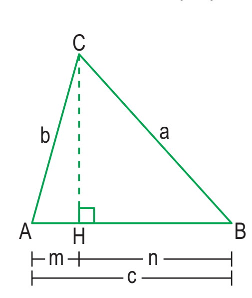






Demostración:

Del triángulo ABC, trazamos $\overline{CH}$, perpendicular a $\overline{AB}$.



Del triángulo AHC: $\cos A=\frac{m}{b}$

Del triángulo BHC: $\cos b=\frac{n}{a}$

Luego:

$c = m + n$

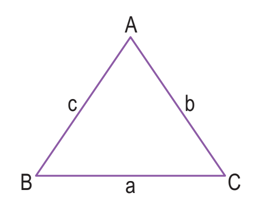
$c = b\cos A + a\cos B$

De igual forma se demuestran las demás proyecciones.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS SEMIÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

En todo triángulo, con respecto a sus ángulos se cumple:

1. Seno



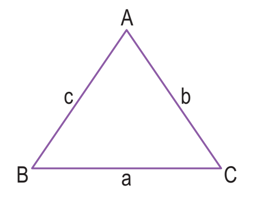
p: semiperímetro $\Rightarrow p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

2. Coseno



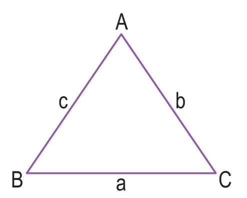
p: semiperímetro

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

3. Tangente



p: semiperímetro

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

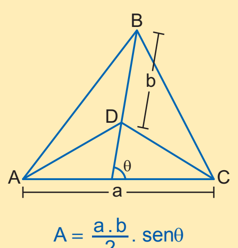
$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Observación

Área de una región cuadrangular y el ángulo comprendido entre ellos.

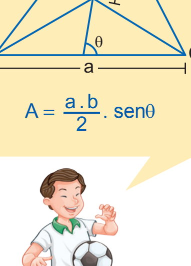
- Región cuadrangular convexa.



$AC = d_1 \wedge BD = d_2$

$\Rightarrow A = \dfrac{d_1 . d_2}{2} . \operatorname{sen}\theta$

- Región cuadrangular cóncava

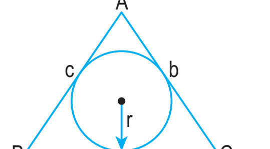


$A = \dfrac{a . b}{2} . \operatorname{sen}\theta$



CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS EN UN TRIÁNGULO

1. Inradio



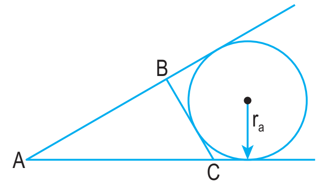
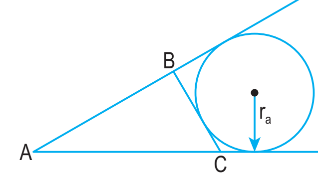
$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$$

$$r = (p-b)\tan\frac{B}{2}$$

$$r = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$

p: semiperímetro

2. Exradio

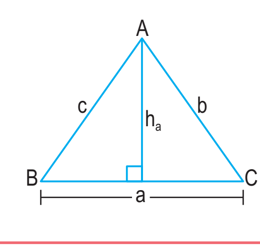
$$r_a = p\tan\frac{A}{2}$$

$$r_b = p\tan\frac{B}{2}$$

$$r_c = p\tan\frac{C}{2}$$

p: semiperímetro

3. Altura

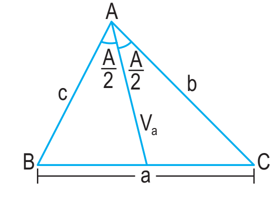


$$h_a = \frac{a\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A}$$

$$h_b = \frac{b\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}B}$$

$$h_c = \frac{c\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}$$

4. Bisectriz interior

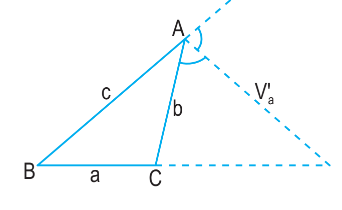


$$V_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

$$V_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$$

$$V_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$$

5. Bisectriz exterior

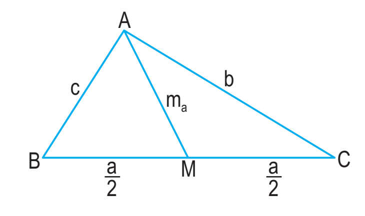


$$V'_a = \frac{2bc}{|b-c|}\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

$$V'_b = \frac{2ac}{|a-c|}\operatorname{sen}\frac{B}{2}$$

$$V'_c = \frac{2ab}{|a-b|}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

6. Mediana



$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

$$4m_b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos B$$

$$4m_c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$$

Problemas resueltos

1 En un triángulo ABC, se cumple: $\frac{a+b}{a+c}=\frac{c-a}{b}$
Calcula la medida del ángulo C.

Resolución:

Del dato tenemos:

$$\frac{a+b}{a+c}=\frac{c-a}{b}$$

$b(a+b)=(a+c)(c-a)$

$ba+b^2=c^2-a^2$

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2+ab$ ...(I)

Por la ley de cosenos:

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ...(II)

Igualamos (I) y (II), y obtenemos:

$a^2+b^2+ab=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$\cos C=\frac{ab}{-2ab}$$

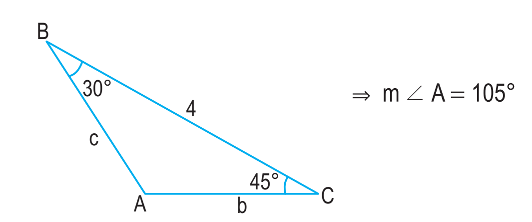
$$\cos C=\frac{-1}{2}$$

Luego, el valor del ángulo C es 120°.

2 Dado su triángulo ABC, se tienen los siguientes datos: $a=4$, $m\angle B=30°$ y $m\angle C=45°$. Calcula b y c.

Resolución:

Graficamos el triángulo y colocamos los datos:



$\Rightarrow m\angle A=105°$

Aplicamos la ley de senos:

$$\frac{4}{\text{sen}105°}=\frac{b}{\text{sen}30°}=\frac{c}{\text{sen}45°}$$

Reemplazamos los respectivos valores:

$$b=\frac{4\text{sen}30°}{\text{sen}105°}=\frac{4\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$b=2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

Luego:

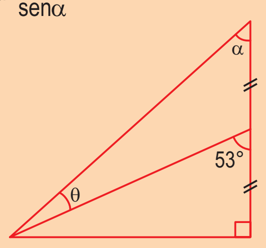
$$c=\frac{4\text{sen}45°}{\text{sen}105°}$$

$$c=\frac{4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{16\sqrt{2}}{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$c=\frac{16}{(\sqrt{12}+2)}=\frac{16}{2\sqrt{3}+2}$$

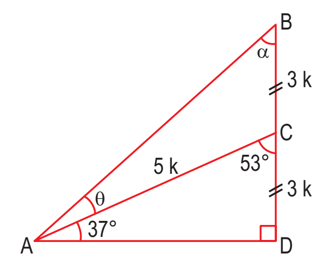
$c=4(\sqrt{3}-1)$

3 Del gráfico, calcula $\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\alpha}$



Resolución:

Del gráfico tenemos:



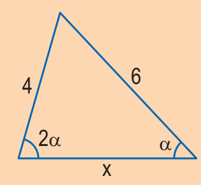
Aplicamos la ley de senos en el triángulo ABC:

$$\frac{3k}{\text{sen}\theta}=\frac{5k}{\text{sen}\alpha}=2R\Rightarrow \text{sen}\theta=\frac{3k}{2R}\wedge \text{sen}\alpha=\frac{5k}{2R}$$

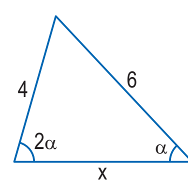
Nos piden calcular:

$$\frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\alpha}=\frac{\frac{3k}{2R}}{\frac{5k}{2R}}=\frac{3k(2R)}{5k(2R)}=\frac{3}{5}$$

4 Calcula x en la figura.



Resolución:



Por ley de senos:

$$\frac{6}{\text{sen}2\alpha}=\frac{4}{\text{sen}\alpha}\Rightarrow\frac{6}{4}=\frac{\text{sen}2\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{2\text{sen}\alpha\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}=\frac{3}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{4}$$

Por ley de cosenos:

$4^2=6^2+x^2-2(6)(x)\cos\alpha$

$16=36+x^2-12x\left(\frac{3}{4}\right)$

Luego:

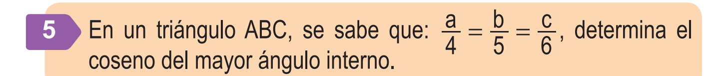
$x^2-9x+20=0$

$(x-5)(x-4)=0$

$\Rightarrow x=5\ \vee\ x=4$

Si: $x=4\Rightarrow\alpha=45°\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq\frac{3}{4}$

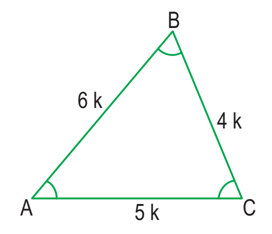
$\therefore x=5$



5 En un triángulo ABC, se sabe que: $\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6}$, determina el coseno del mayor ángulo interno.

Resolución:

Graficamos el triángulo ABC:



$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = k$

$a = 4k \wedge b = 5k \wedge c = 6k$

Sabemos que a mayor ángulo se le opone mayor lado.

Aplicamos la ley de cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

$$(6k)^2 = (4k)^2 + (5k)^2 - 2(4k)(5k)cosC$$

$$36k^2 = 16k^2 + 25k^2 - 40k^2cosC$$

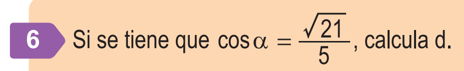
$$36k^2 = (16 + 25 - 40cosC)k^2$$

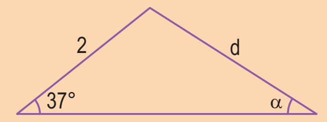
$$36 = 41 - 40cosC$$

$$cosC = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

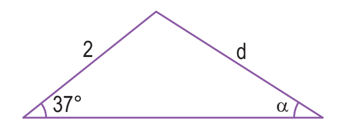
$$\Rightarrow cosC = \frac{1}{8}$$

6 Si se tiene que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, calcula d.





Resolución:



Por dato: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Por la ley de senos:

$$\frac{d}{sen37°} = \frac{2}{sen\alpha} \Rightarrow d = \frac{2sen37°}{sen\alpha}$$

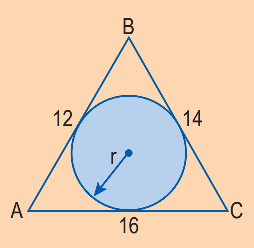
$$\Rightarrow d = \frac{2\left(\frac{3}{5}\right)}{sen\alpha} = \frac{6}{5sen\alpha} \Rightarrow d^2 = \left(\frac{6}{5sen\alpha}\right)^2$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{36}{25(1 - \cos^2\alpha)} = \frac{36}{25\left(1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{36}{4} \Rightarrow d^2 = 9$$

$$\therefore d = 3$$

7 Calcula el área de la región sombreada mostrada en la figura:



Resolución:

Del teorema de Herón tendremos:

$$A_T = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Como: $p = \frac{12 + 14 + 16}{2} = 21$

Luego:

$$A_T = \sqrt{21(21 - 14)(21 - 16)(21 - 12)} = 21\sqrt{15}$$

Pero sabemos:

$A_T = p\,.\,r = 21\sqrt{15}$ $\Rightarrow 21r = 21\sqrt{15}$

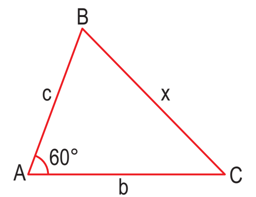
$\therefore r = \sqrt{15}$

Finalmente el área del círculo es:

$$A_{\odot} = \pi r^2 = \pi(\sqrt{15})^2 = 15\pi$$

8 Dos automóviles parten simultáneamente de una estación con movimiento rectilíneo uniforme siguiendo pistas que forman un ángulo de 60°. Las velocidades que llevan son de 36 y 72 km/h. Calcula la distancia que los separa al cabo de 3 horas y 30 minutos.

Resolución:



Del MRU sabemos que: $d = v\,.\,t$

Luego tendremos que:

$$c = \left(36\ \frac{km}{h}\right)(3{,}5\ h) = 126\ km$$

$$b = \left(72\ \frac{km}{h}\right)(3{,}5\ h) = 252\ km$$

Como ya conocemos 3 elementos del triángulo ABC, podemos calcular los 3 elementos restantes. En este caso calcularemos el lado opuesto al ángulo de 60°, usando la ley de cosenos.

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos60°$$

$$x^2 = 252^2 + 126^2 - 2(252)(126)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 79\,380 - 31\,752$$

$$x = \sqrt{47\,628}$$

$$x = \sqrt{2^2\,.\,3^5\,.\,7^2}$$

$$x = 126\sqrt{3}\ km$$

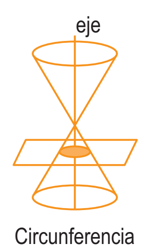
SECCIONES CÓNICAS

DEFICICIÓN

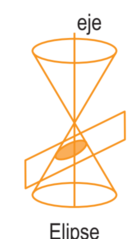
La superficie cónica se genera al girar una recta llamada generatriz alrededor de otra recta fija llamada eje, con la cual se corta en un punto **v**, llamado vértice.

Denominamos **sección cónica** a la curva de intersección de una superficie cónica con un plano.

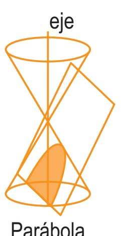
Las secciones cónicas generadas son: la circunferencia, la elipse y la parábola.



Circunferencia



Elipse



Parábola

Importante

Si el plano que corta a la superficie cónica es perpendicular al eje, la sección es una **circunferencia**.

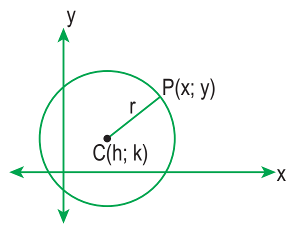
Si inclinamos el plano de modo que sea oblicuo con el eje y corte a todas las generatrices, la sección es una **elipse**.

Si continuamos inclinando el plano de modo que sea oblicuo con el eje y que sea paralelo a una generatriz, resulta una **parábola**.



LA CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto fijo del mismo plano.
A ese punto fijo lo llamaremos centro (C(h; k)) y a la distancia de ese centro a cualquier punto (P(x; y)) de la circunferencia lo llamaremos radio (r).



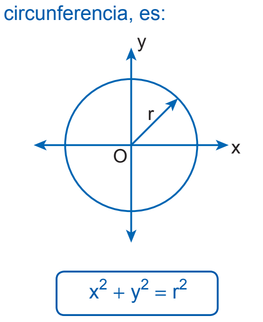
La forma ordinaria de la ecuación de toda circunferencia con centro C(h; k) y radio r es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Donde: P(x; y) es un punto cualquiera de la circunferencia.

Nota

La ecuación canónica de la circunferencia, es:



$$x^2+y^2=r^2$$

Ecuación general de la circunferencia

Desarrollamos la ecuación ordinaria y obtenemos la ecuación general.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$x^2-2hx+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$

$x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+k^2+h^2-r^2=0$

Donde: $-2h=A$; $-2k=B$; $k^2+h^2-r^2=C$

Entonces: $\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$

Ejemplo:
Halla el centro y el radio de la circunferencia:
$x^2+y^2-8x-10y=8$

Resolución:
Para llegar a la ecuación general de la circunferencia debemos completar cuadrados a la expresión dada:

$x^2-2\,.\,4\,.\,x+16-16=(x-4)^2-16$

$y^2-2\,.\,5\,.\,y+25-25=(y-5)^2-25$

Luego:

$(x-4)^2-16+(y-5)^2-25=8$

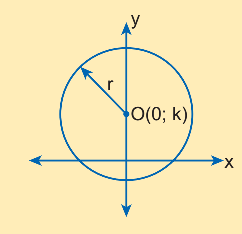
$(x-4)^2+(y-5)^2=49$

Por lo tanto: $(h; k)=(4; 5)\wedge r=7$

Observación

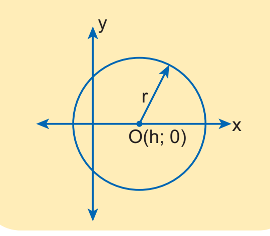
Si: h = 0, el centro de la circunferencia es el punto (0; k).

Gráficamente:



Si: k = 0, el centro de la circunferencia es el punto (h; 0).

Gráficamente:



Observación

La elipse es una figura simétrica respecto a su eje focal y también respecto a su eje normal.



Nota

Sabemos que:
2a: longitud del eje mayor
2b: longitud del eje menor
2c: distancia focal

Entonces se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Nota

La excentricidad (e) de una elipse es un número que mide el mayor o menor achatamiento de la elipse.

$e = \frac{c}{a}$; $0 \leq e \leq 1$

Importante

En toda elipse se cumple:

$RS = \frac{2b^2}{a}$

Donde:
RS: lado recto



Importante

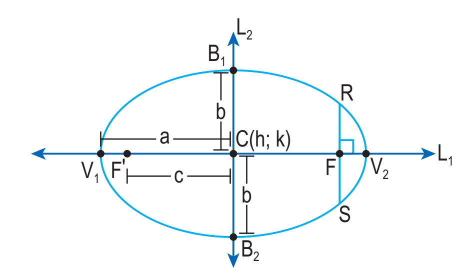
El cambio de variable que se realizó es el siguiente:

$A = b^2$
$B = a^2$
$C = -2hb^2$
$D = -2ka^2$
$E = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

LA ELIPSE

La elipse es un lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos del mismo es constante. A esos puntos fijos se les denomina focos.

Elementos:



Focos (F; F'): son los puntos fijos de la elipse

Eje focal ($\overleftrightarrow{L_1}$): recta que pasa por los focos

Vértices (V_1; V_2):son los puntos de intersección de la elipse con el eje focal.

Centro C(h; k): punto medio del segmento V_1V_2.

$\overline{V_1V_2}$:eje mayor. Además: $V_1V_2 = 2a$

$\overline{B_1B_2}$: eje menor. Además: $B_1B_2 = 2b$

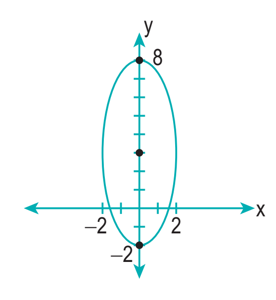
Eje normal ($\overleftrightarrow{L_2}$): recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro (C(h; k)).

F'F: Distancia entre focos; (F'F = 2c)

Además, se cumple que: $a > b$

Lado recto ($\overline{RS}$): es una cuerda perpendicular al eje focal y pasa por cualquiera de los focos.

La gráfica de la elipse es la siguiente:



Ecuación general de la elipse

Es posible transformar la ecuación de la elipse a una ecuación cuadrática.
Partimos de la ecuación ordinaria, desarrollamos los binomios y luego agrupamos convenientemente:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \text{ (elipse de eje horizontal y centro C(h; k))}$$

$$\frac{x^2 - 2xh + h^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2xh + h^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$a^2b^2\left(\frac{x^2 - 2xh + h^2}{a^2}\right) + a^2b^2\left(\frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2}\right) - a^2b^2 = 0$$

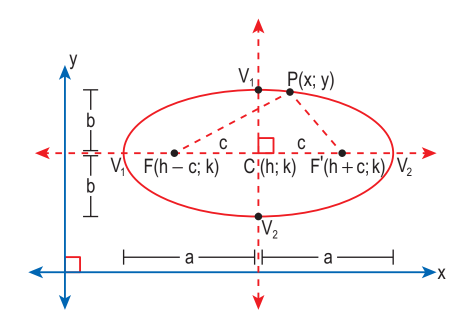
$$b^2x^2 - 2hb^2x + b^2h^2 + a^2y^2 - 2ka^2y + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 + (-2hb^2)x + (-2ka^2)y + (b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2) = 0$$

$$\Rightarrow Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

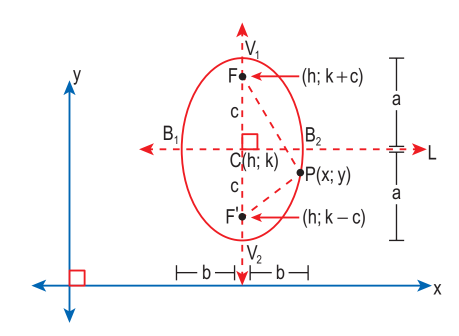
Ecuaciones de la elipse con eje focal paralelo al eje x e y

Ecuación de la elipse de centro C(h; k) y eje focal paralelo al eje x.



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la elipse de centro C(h; k) y eje focal paralelo al eje y.



$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Ejemplos de aplicación:

1. Dada la ecuación de la elipse: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{25}=1$

   Determina sus elementos (vértices, extremos del eje menor, focos y la longitud del lado recto).

   Resolución:
   Notamos que la elipse tiene como centro al punto: C = (0; 3)

   Además: $25 > 9 \Rightarrow a = 5$ y $b = 3$
   $b^2 = a^2 - c^2$
   $9 = 25 - c^2$
   $\Rightarrow c = 4$

   Entonces, el eje focal de la elipse es paralelo al eje y.
   Sus vértices son:
   $V_1 = (0; 3-5) \Rightarrow V_1 = (0; -2)$
   $V_2 = (0; 3+5) \Rightarrow V_1 = (0; 8)$

   Los extremos del eje menor son:
   $A_1 = (0-2; 3) \Rightarrow A_1 = (-2; 3)$
   $A_2 = (0+2; 3) \Rightarrow A_2 = (2; 3)$

   Los focos son:
   $F_1 = (0; 3-4) \Rightarrow F_1 = (0; -1)$
   $F_2 = (0; 3+4) \Rightarrow F_2 = (0; 7)$

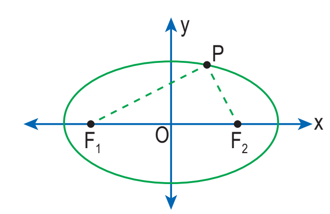
   Longitud de lado recto:
   $LR = \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(9)}{5} = \dfrac{18}{5}$

2. Según la ecuación de la elipse:
   $100x^2 + 64y^2 = 6400$
   Halla el perímetro del triángulo F_1F_2P, siendo F_1 y F_2 los focos, y P un punto cualquiera distinto de los vértices.

   Resolución:
   Transformamos la ecuación:
   $\dfrac{100x^2}{6400}+\dfrac{64y^2}{6400}=\dfrac{6400}{6400}$

   $\Rightarrow \dfrac{x^2}{64}=\dfrac{y^2}{100}=1$

   De donde: $a^2 = 100$; $b^2 = 64 \Rightarrow a = 10$; $b = 8$
   Además: $c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow c = 6$



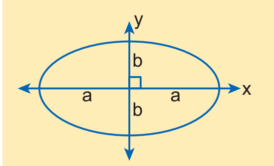
   Piden:
   Perímetro del $\Delta F_1F_2P = F_1P + PF_2 + F_1F_2$
   Por definición:
   $F_1P + PF_2 = 2a = 2(10) = 20$
   Además: $F_1F_2 = 2c = 2(6) = 12$

   Luego:
   Perímetro del $\Delta F_1F_2P = 20 + 12 = 32$

Observación

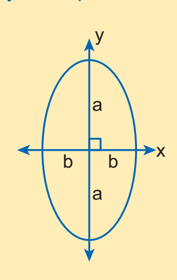
Si el centro de la elipse coincide con el origen, entonces: h = k = 0.

Con eje focal paralelo al eje **x**:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Con eje focal paralelo al eje **y**:



$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$



LA PARÁBOLA

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto y de una recta del mismo plano. El punto se denomina **foco** y la recta **directriz**.

Observación

En la parábola se cumple:
- HV = VF
- AB = 4VF



Elementos:

Foco (F): punto fijo de la parábola

Vértice (V(h; k)): es el punto medio del segmento trazado perpendicularmente del foco a la directriz.

Eje focal ($\overleftrightarrow{L}$): divide simétricamente a la parábola.

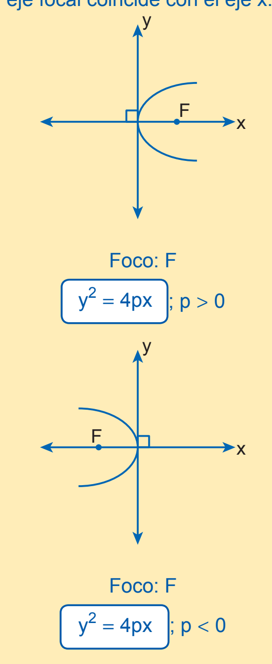
Directriz ($\overleftrightarrow{L_D}$) : recta perpendicular al eje focal.

Lado recto ($\overline{AB}$): segmento perpendicular al eje focal que pasa por el foco.

Cuerda focal ($\overline{EQ}$): segmento que une dos puntos de la parábola y pasa por el foco.

Observación

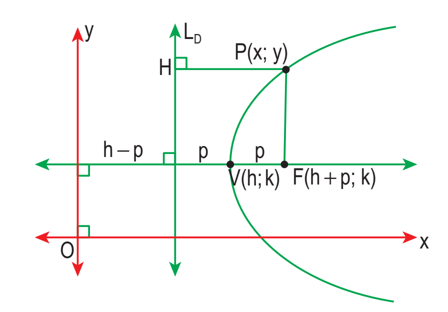
Se denomina ecuación canónica de la parábola cuando su vértice coincide con el origen de coordenadas y su eje focal coincide con el eje x.





Ecuación de la parábola

1. Ecuación de la parábola, cuyo eje focal es paralelo al eje x.
   - Si la parábola se abre hacia la derecha (p > 0):

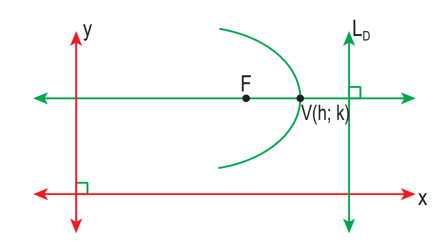


Ecuación ordinaria

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

p > 0

   - Si la parábola se abre hacia la izquierda (p < 0):

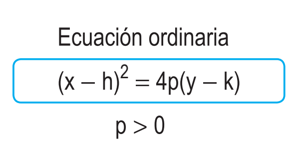


Ecuación ordinaria

$$(y - k)^2 = 4p(x - h); \quad p < 0$$



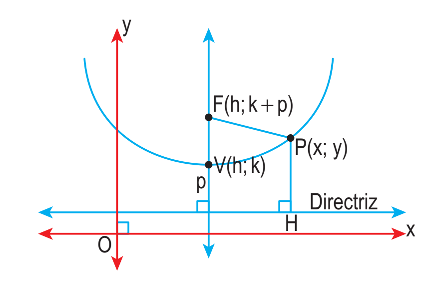
2. Ecuación de la parábola, cuyo eje focal es paralelo al eje y.
   - Si la parábola se abre hacia arriba (p > 0):



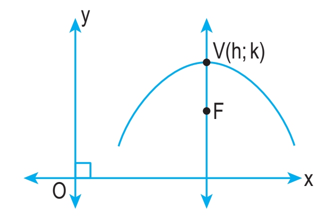
Ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

p > 0



   - Si la parábola se abre hacia abajo (p < 0)



Ecuación ordinaria

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

$p < 0$

Ejemplos:

1. Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco tienen como coordenadas (–4; 3) y (–1; 3); respectivamente.

   Resolución:
   Por dato del enunciado, sabemos que:
   $V(-4; 3)$ y $F(-1; 3)$

   Además, la parábola es paralela al eje x.

   Calculamos el valor del parámetro (p):
   $p = (-1) - (-4) = 3 > 0$

   Luego, la parábola se abre hacia la derecha.
   Se cumple: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

   Reemplazamos los valores:
   $(y - 3)^2 = 4(3)(x + 4)$
   $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$

2. Halla la ecuación de la parábola cuyos puntos extremos del lado recto son S(1;3) y R(7; 3), si esta se abre hacia arriba.

   Resolución:
   $SR = |4p| = \sqrt{(7-1)^2 + (3-3)^2} = 6$

   $\Rightarrow 4p = 6 \vee 4p = -6 \Rightarrow p = \frac{3}{2} \vee p = \frac{-3}{2}$

   Como la parábola se abra hacia arriba, entonces:
   $p = \frac{3}{2}$

   Ahora, el foco F es punto medio del lado recto SR:

   $F\left(\frac{1+7}{2}; \frac{3+2}{2}\right) \Rightarrow F(4; 3) = F(h; p + k)$

   $\Rightarrow h = 4 \wedge 3 = \frac{3}{2} + k \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

   La ecuación, es:

   $(x - 4)^2 = 4\left(\frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right)^2$

   $\Rightarrow h = 4 \wedge 3 = \frac{3}{2} + k \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

   La ecuación, es:

   $(x - 4)^2 = 4\left(\frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right)^2$

   $\Rightarrow (x - 4) = 6\left(y - \frac{3}{2}\right)^2$

3. Halla la ecuación de la parábola, cuyo vértice y foco son los puntos V(5; 4) y F(5; 2), respectivamente.

   Resolución:
   $V(h; k) = V(5; 4) \Rightarrow h = 5 \wedge k = 4$
   $F(h; k + p) = F(5; 2) \Rightarrow k + p = 2 \Rightarrow p = -2$

   La ecuación de la parábola es:
   $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
   $(x - 5)^2 = -8(y - 4)$

4. Halla el vértice, el foco y la longitud del lado recto de la parábola:
   $y^2 - 6y + 10x - 1 = 0$

   Resolución:
   Completamos cuadrados:
   $y^2 - 6y + 9 = -10x + 1 + 9$
   $(y - 3)^2 = -10x + 10$
   $(y - 3)^2 = 4\left(-\frac{5}{2}\right)(x - 1)$

   Entonces:
   Vértice: $V(h; k) = V(1; 3)$
   $p = -\frac{5}{2} \Rightarrow F(h + p; k) = F\left(-\frac{3}{2}; 3\right)$
   $SR = |4p| = \left|4\left(\frac{-5}{2}\right)\right| = 10$

5. El vértice de una parábola está sobre la recta $3x + 7y + 1 = 0$ y el foco es el punto F(2; 1). Halla la ecuación de tal parábola.

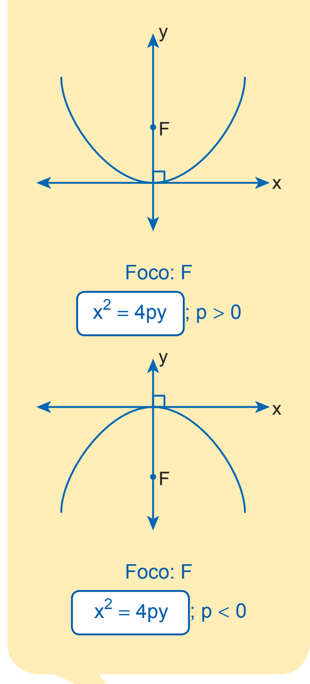
   Resolución:
   $V(h; k) \in L: 3x + 7y + 1 = 0 \Rightarrow 3h + 7k + 1 = 0$ ...(1)
   Además: $F(h; k + p) = F(2; 1) \Rightarrow h = 2$ ...(2)
   $k + p = 1$ ...(3)

   Reemplazando (2) en (1):
   $3(2) + 7k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$ ...(4)

   De (2) y (4): $k + p = -1 + p = 1 \Rightarrow p = 2$
   Por lo tanto: $V(2; -1)$
   La ecuación es: $(x - 2)^2 = 8(y + 1)$

Observación

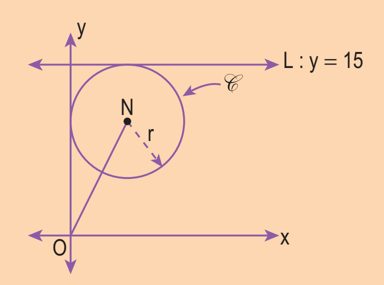
Se denomina ecuación ordinaria de la parábola cuando su vértice coincide con el origen de coordenadas y su eje focal coincide con el eje y.



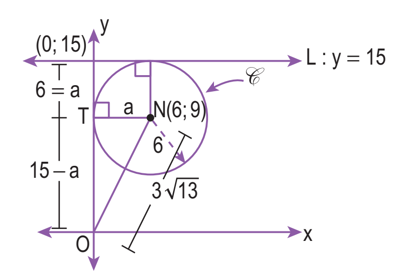


Problemas resueltos

1 De la figura, calcula la ecuación general de la circunferencia mostrada, si $ON = 3\sqrt{13}$ y $r < 8$.



Resolución:



En el ⊿ OTN (teorema de Pitágoras):

$a^2 + (15 - a)^2 = (3\sqrt{13})^2$

$\Rightarrow a = 6 \wedge a = 9$ (no cumple)

La ecuación de la circunferencia es:

$\mathscr{C}: (x - 6)^2 + (y - 9)^2 = 6^2$

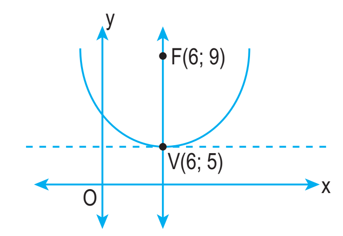
Desarrollando, obtenemos la ecuación general:

$\mathscr{C}: x^2 + y^2 - 12x - 18y + 81 = 0$

2 Halla la ecuación ordinaria de una parábola cuyo vértice es (6; 5) y su foco es (6; 9).

Resolución:

Graficando la parábola:



De la figura, se observa que la parábola se abre hacia arriba, entonces $p > 0$.

$p = 9 - 5 = 4$

Por lo tanto, la ecuación ordinaria de la parábola es:

$(x - 6)^2 = 4(4)(y - 5)$

$(x - 6)^2 = 16(y - 5)$

3 Halla la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos (6; 3) y (–2; 3) y la longitud del lado recto es 2 u.

Resolución:

De las coordenadas de los vértices notamos que el eje focal es paralelo al eje x.

Luego, la ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Calculamos el centro de la elipse: $C = \left(\frac{6 + (-2)}{2}; \frac{3 + 3}{2}\right) = (2; 3)$

Además: $V_1V_2 = 2a = \sqrt{[6 - (-2)]^2 + (3 - 3)^2}$

$2a = \sqrt{8^2 + 0^2}$

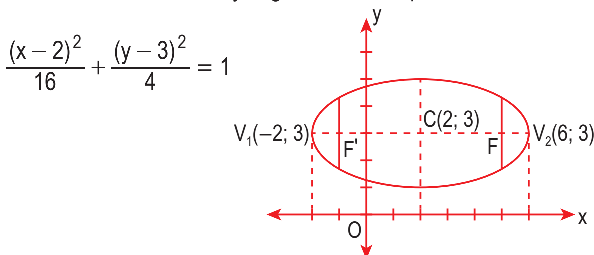
$2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Además, por dato sabemos:

$SR = 2 \Rightarrow \frac{2b^2}{a} = 2 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{2(4)}{2}} = 2$

Por lo tanto, la ecuación y la gráfica de la elipse es:

$$\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1$$



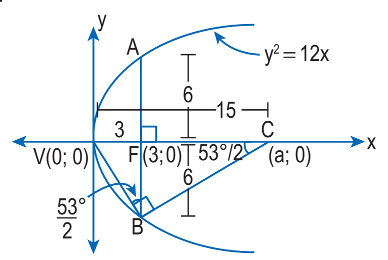
4 El vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo es el extremo del lado recto de la parábola $y^2 = 12x$, el segundo vértice del triángulo es el vértice de la parábola. ¿Cuáles son las coordenadas del tercer vértice del triángulo, sabiendo que está ubicado en el eje x?

Resolución:

Dato: $y^2 = 12x$ (De aquí deducimos que el vértice es el origen de coordenadas y que el eje focal es el eje x)

Luego: $4p = 12 \Rightarrow p = 3$ ($p > 0$, entonces la parábola se abre hacia la derecha)

Graficamos:



Sabemos que $AB = 4VF$, entonces:

$FB = 2VF \Rightarrow m\angle FBV = 53°/2$

En el triángulo rectángulo VBC:

$m\angle FCB = m\angle FBV = 53°/2 \Rightarrow FC = 2(6) = 12$

Luego, las coordenadas del tercer vértice del triángulo son:

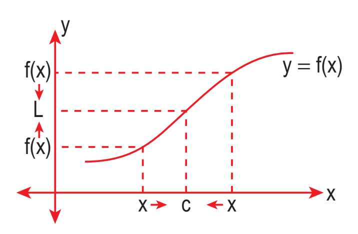
$(a; 0) = (15; 0)$

LÍMITES Y DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

T

NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE

El símbolo $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ significa que una función f(x) tiende, o se aproxima a L, cuando x está muy próximo a c (diferente de c) o dicho de otra manera, para x próximo a c, pero diferente a c, f(x) está próximo a L.

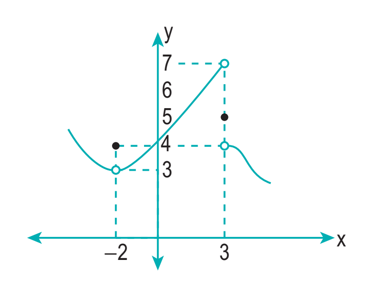


En el gráfico que se muestra, la curva representa la gráfica de la función f(x), el número c aparece en el eje x, el límite L, en el eje y.

Los números x, que están próximos a c, se dividen en dos clases: los que están a la izquierda de c y los que están a la derecha de c.

- $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$: significa que cuando x se aproxima a c por la izquierda f(x) se aproxima a L, o el límite de f(x) por la izquierda cuando x tiende a c es L.
- $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$: significa que cuando x se aproxima a c por la derecha f(x) se aproxima a L, o el límite de f(x) por la derecha cuando x tiende a c es L.

Ejemplo:



- De la gráfica se observa que:

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = 3$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3$ sin importar que $f(-2) = 4$

- En cambio:

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 7$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe

Observación

Sea la función $y = 2x + 3$

x	y
1,98	6,96
1,99	6,98
2	7
2,01	7,02
2,02	7,04

Observamos que conforme nos acercamos a x = 2 por la izquierda (x < 2) el valor de la función se aproxima a 7, y si tomamos valores cercanos a x = 2 por la derecha (x > 2) el valor de la función también se aproxima a 7.

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}(2x + 3) = 7$



TEOREMA DE ESTRICCIÓN

Sean f, g y h tres funciones reales de variable real y además c un punto que no pertenece necesariamente a $Dom(f) \cap Dom(g) \cap Dom(h) \neq \phi$.

Si se cumple que:

i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$

Entonces: $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$

Ejemplo:

Calcula: $L = \lim\limits_{x\to 0} x.\text{sen}\dfrac{1}{x}$

Resolución:

$\left|x\text{sen}\dfrac{1}{x}\right| = |x|\left|\text{sen}\dfrac{1}{x}\right|$

Como: $\left|\text{sen}\dfrac{1}{x}\right| \leq 1;\ \forall x \neq 0$

$|x|\left|\text{sen}\dfrac{1}{x}\right| \leq |x| \Rightarrow 0 \leq \left|x\text{sen}\dfrac{1}{x}\right| \leq |x|$

Como: $\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$; entonces:

$\lim\limits_{x\to 0}\left|x\text{sen}\dfrac{1}{x}\right| = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} x\text{sen}\dfrac{1}{x} = 0$; pues $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$

$\therefore L = 0$

Observación

En general, si se cumple que:

$\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

Entonces, se debe cumplir previamente que los límites laterales coinciden, es decir:

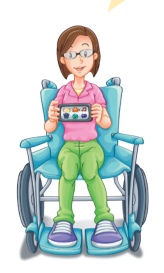
$\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$



Atención

Sea el gráfico:

Se observa que cuando x se acerca a c, g se encuentra entre f y h, además cuando x tiende a c, f(x) y h(x) tienden a L, entonces g(x) también tiende a L.



Nota

$\forall n \in \mathbb{R}$; $n \neq 0$ se cumple:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(nx)}{x} = n$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(nx)}{x} = n$

Nota

$\forall m, n \in \mathbb{R}$; $n \neq 0$ se cumple:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(mx)}{\text{sen}(nx)} = \dfrac{m}{n}$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(mx)}{\tan(nx)} = \dfrac{m}{n}$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

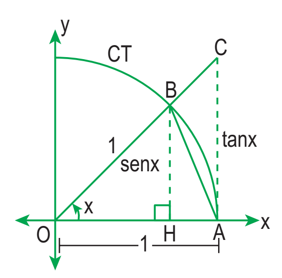
Vamos a utilizar el teorema de estricción para demostrar los límites trigonométricos que veremos en cálculos posteriores.

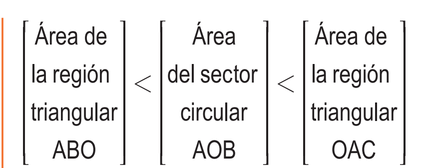
Teorema 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

Demostración:

1.° Analizamos cuando x tiende a cero por la derecha, es decir, para x > 0:





$$\begin{bmatrix}\text{Área de}\\ \text{la región}\\ \text{triangular}\\ \text{ABO}\end{bmatrix} < \begin{bmatrix}\text{Área}\\ \text{del sector}\\ \text{circular}\\ \text{AOB}\end{bmatrix} < \begin{bmatrix}\text{Área de}\\ \text{la región}\\ \text{triangular}\\ \text{OAC}\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\text{sen}x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

$$\text{sen}x < x < \tan x$$

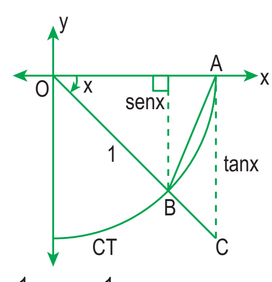
Multiplicamos por $\left(\dfrac{1}{\text{sen}x}\right)$:

$$1 < \frac{x}{\text{sen}x} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertimos:

$$\cos x < \frac{\text{sen}x}{x} < 1 \quad \text{... (I)}$$

Ahora analizamos cuando x tiende a cero por la izquierda, es decir, para x < 0:



$$\frac{1}{2}|\text{sen}x| < \frac{1}{2}|x| < \frac{1}{2}|\tan x|$$

Como x < 0

$|\text{sen}x| = -\text{sen}x$, $|x| = -x$; $|\tan x| = -\tan x$

Luego:

$$-\frac{1}{2}\text{sen}x < -\frac{1}{2}x < -\frac{1}{2}\tan x$$

Multiplicamos por (–2):

$$\text{sen}x > x > \tan x$$

$$\frac{\text{sen}x}{\text{sen}x} < \frac{x}{\text{sen}x} < \frac{\tan x}{\text{sen}x}$$

$$1 < \frac{x}{\text{sen}x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x < \frac{\text{sen}x}{x} < 1 \quad \text{...(II)}$$

De (I) y (II), además $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, se tiene que: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}x}{x} = 1$

Teorema 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Demostración:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{sen}x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}}_{1} = 1$$

Teorema 3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}x}{x} = 1$$

Demostración:

Por FTI: sen(arcsenx) = x

$$\frac{\text{arcsen}x}{x} = \frac{\text{arcsen}x}{\text{sen}(\text{arcsen}x)}$$

como $x \to 0$

$\Rightarrow \text{arcsen}x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsen}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsen}x}{\text{sen}(\text{arcsen}x)}$$

Hacemos: $\theta = \text{arcsen}x$, entonces θ tiende a 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsen}x}{x} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\text{sen}\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\text{sen}\theta}{\theta}\right)^{-1}$$

$$= \left(\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\theta}{\theta}\right)^{-1}$$

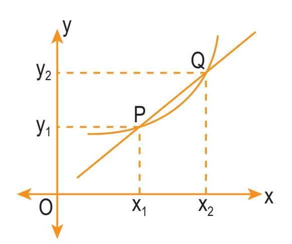
$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsen}x}{x} = (1)^{-1} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsen}x}{x} = 1$$

Teorema 4

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

NOCIÓN INTUITIVA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Consideremos la curva $y = f(x)$ que corresponde a una función continua y en ella dos puntos diferentes $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$. $\overleftrightarrow{PQ}$ es una recta secante a la curva con pendiente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



$y_2 = f(x_2)$; $y_1 = f(x_1)$ y si

$x_2 - x_1 = h \Rightarrow x_2 = x_1 + h$

$$\Rightarrow m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Cuando el punto Q lo consideramos cada vez más cerca al punto fijo P, la recta secante $\overleftrightarrow{PQ}$ se acerca cada vez más a una recta tangente a dicha curva en el punto P.

Por lo tanto:
La pendiente m_T de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_1, y_1)$ es:

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Definición

La derivada de una función f, denotada por f', es aquella que viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo:
Calcula la derivada de la función $f(x) = 3x^2 - 9x + 4$, en el punto $x_0 = 3$.

Resolución:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{3(3+h)^2 - 9(3+h) + 4 - \left[3(3)^2 - 9(3) + 4\right]}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{3(9 + 6h + h^2) - 27 - 9h + 4 - \left[27 - 27 + 4\right]}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{27 + 18h + 3h^2 - 27 - 9h + 4 - 4}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 9h}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} 3h + 9 = 9$$

Atención

La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P es el límite de las sucesivas secantes, cuando el punto Q tiende hacia el punto P.

Cuando Q se aproxima a P ($Q \to P$), h tiende a cero ($h \to 0$).



Nota

Al proceso de hallar la derivada se llama diferenciación o derivación. Esta operación consiste en hallar una función f' a partir de una función f. Si una función tiene derivada en c, se dice que dicha función es diferenciable o derivable en c. Es decir la función f es diferenciable en c, si f'(c) existe.



PROPIEDADES SOBRE DERIVADAS DE FUNCIONES REALES

a) $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$

Ejemplos:

- Si $f(x) = -5 \Rightarrow f'(x) = 0$
- Si $f(x) = n \Rightarrow f'(x) = 0; \forall\, n \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

Ejemplos:

- Si $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3}$
- Si $f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-4}$

c) $f(x) = cg(x)$, entonces $f'(x) = cg'(x)$

Ejemplos:

- Si $f(x) = 3x^5 \Rightarrow f'(x) = 3(x^5)' = 3 \,.\, 5x^4 = 15x^4$
- Si $f(x) = -2x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -2(x^{-3})' = -2(-3x^{-4}) = 6x^{-4}$

d) $h(x) = f(x) \pm g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

Ejemplos:

- Si $f(x) = x^5 + x^4 \Rightarrow f'(x) = (x^5)' + (x^4)' = 5x^4 + 4x^3$
- Si $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 8x + 11$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= (4x^3)' + (5x^2)' + (8x)' + (11)' \\ &= 4 \,.\, 3x^2 + 5 \,.\, 2x + 8 + 0 \\ &= 12x^2 + 10x + 8 \end{aligned}$$

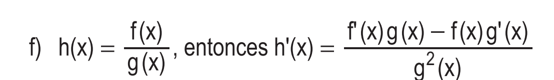


e) $h(x) = f(x)\, g(x)$, entonces $h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

Ejemplo:

- Si $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 2x + 5)(4x - 3)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= (x^3 + 3x^2 - 2x + 5)'(4x - 3) + (x^3 + 3x^2 - 2x + 5)(4x - 3)' \\ &= (3x^2 + 6x - 2 + 0)(4x - 3) + (x^3 + 3x^2 - 2x + 5)(4 - 0) \\ &= (3x^2 + 6x - 2)(4x - 3) + (x^3 + 3x^2 - 2x + 5)4 \\ &= 12x^3 - 9x^2 + 24x^2 - 18x - 8x + 6 + 4x^3 + 12x^2 - 8x + 20 \\ &= 16x^3 + 27x^2 - 34x + 26 \end{aligned}$$



f) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Ejemplo:

- Si $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x + 3}{x^2 - 1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^3 - 2x^2 + 5x + 3)'(x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4x + 5 + 0)(x^2 - 1) - (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)2x}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x^3 + 4x + 5x^2 - 5 - 2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 6x}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 8x^2 - 2x - 5}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

Observación

La derivada de $y = f(x)$ que la hemos denotado como $f'(x)$, tiene otras notaciones como: $\dfrac{dy}{dx}$; $D_x f(x)$ que significan lo mismo que $f'(x)$.

Ejemplo:

$f(x) = 3x^4 + 4x^3$, entonces

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$ ó

$\dfrac{dy}{dx} = 12x^3 + 12x^2$ ó

$D_x f(x) = 12x^3 + 12x^2$



Nota

Si $f(x) = \sqrt{x}$;

entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

- $(\text{sen}x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\,\text{sen}x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \tan x$
- $(\csc x)' = -\,\csc x \cot x$

Ejemplos:

1. $(x + \tan x)' = x' + (\tan x)'$
   $= 1 + \sec^2 x$

2. $(x - \cos x) = x' - (\cos x)'$
   $= 1 - (-\text{sen}x)$
   $= 1 + \text{sen}x$

3. $(x\csc x)' = x'(\csc x) + x(\csc x)'$
   $= \csc x + x(-\csc x.\cot x)$
   $= \csc x - x.\csc x.\cot x$
   $= \csc x(1 - x.\cot x)$

4. $(2x\cos x - 2\text{sen}x)'$
   $= (2x\cos x)' - (2\text{sen}x)'$
   $= (2x)'\cos x + 2x(\cos x)' - 2(\text{sen}x)'$
   $= 2\cos x + 2x(-\text{sen}x) - 2(\cos x)$
   $= -2x\,\text{sen}x$

Nota

Si f es una función diferenciable en u y u es una función diferenciable en x, entonces:

- $\frac{d}{dx}(\text{sen}u) = \cos u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\text{sen}u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\tan u\frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u\cot u\frac{du}{dx}$

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

- $(\text{arcsen}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\text{arccos}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\text{arctan}x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\text{arccot}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $(\text{arcsec}x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
- $(\text{arccsc}x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

REGLA DE L'HOSPITAL

Se aplica para calcular los límites de la forma: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Ejemplo:

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$$

Resolución:

- Evaluando en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = \frac{0}{0}$$

- Aplicando L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x'}{(\tan x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{\sec^2 0} = \frac{1}{1} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$$

Observación

Las formas: $0\ .\ \infty;\ \infty - \infty;\ 0^0;\ \infty^0$ ó 1^∞ pueden ser transformadas a las formas $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$



Problemas resueltos

1 Calcula:

$E = \lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 5x}$

Resolución:

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{\tan 2x}{2x}\right)}{5\left(\frac{\tan 5x}{5x}\right)} = \frac{2}{5} \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{2x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{5x}}$$

$$E = \frac{2\,.\,1}{5\,.\,1} = \frac{2}{5}$$

2 Calcula:

$\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen}7x}{x - \text{sen}5x}$

Resolución:

$$R = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{\text{sen}7x}{x}}{1 - \frac{\text{sen}5x}{x}} = \frac{1 - 7 \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}7x}{7x}}{1 - 5 \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}5x}{5x}}$$

$$R = \frac{1-7}{1-5} \Rightarrow R = \frac{3}{2}$$

3 Halla $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, para $f(x) = x\text{sen}x$.

Resolución:

$f'(x) = \text{sen}x + x\cos x$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6 + \pi\sqrt{3}}{12}$$

4 Calcula mn, si:

$f(x) = m\cos x + n$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$ y $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$

Resolución:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = m\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + n = 4$$

$$m\,.\,\frac{1}{2} + n = 4 \Rightarrow m + 2n = 8 \qquad ...(1)$$

$f'(x) = m(-\text{sen}x)$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = m\left(-\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2$$

$$-m\,.\,\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow m = -4$$

Reemplazamos $m = -4$ en (1):

$-4 + 2n = 8 \Rightarrow n = 6$

$\therefore\ mn = -24$

5 Calcula:

$B = \lim_{x \to 0} \frac{a\text{sen}ax - b\text{sen}bx}{\tan ax + \tan bx}$

Resolución:

Evaluando $x = 0$ se obtiene $\frac{0}{0}$ (indeterminado)

Aplicando L'Hospital:

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{a(a\cos ax) - b(b\cos bx)}{a\sec^2 ax + b\sec^2 bx}$$

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{a^2\cos ax - b^2\cos bx}{a\sec^2 ax + b\sec^2 bx}$$

$$B = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)}$$

$\therefore\ B = a - b$

6 Calcula:

$P = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}7x - \text{sen}3x}{x\cos 3x}$

Resolución:

Evaluando $x = 0$ se obtiene $\frac{0}{0}$ (indeterminado)

- Por lo tanto:

$$P = \lim_{x \to 0} \frac{2\text{sen}\left(\frac{7x - 3x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x + 3x}{2}\right)}{x\cos 3x}$$

$$P = \lim_{x \to 0} \frac{2\text{sen}2x\cos 5x}{x\cos 3x} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}2x}{x}\,.\,\lim_{x \to 0} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}$$

$$P = 2\,.\,2 \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}2x}{2x}}_{1}.1 \Rightarrow P = 4$$

- Otra forma:

Por L'Hospital:

$$P = \lim_{x \to 0} \frac{7\cos 7x - 3\cos 3x}{\cos 3x - 3x\text{sen}3x} = 4$$

7 Sean las funciones f, g: $\langle 0; \pi\rangle \to \mathbb{R}$ tal que

$f(x) = \cot x$; $g'(x) = f(x)$ $\forall x \in \langle 0; \pi\rangle$ y

$g(\pi/2)$ es una raíz del polinomio: $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$

Halla: $\lim_{x \to 0} [g(x) - \ln x]$

Resolución:

Del enunciado: $g'(x) = \cot x$

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\text{sen}x}$$

$$g'(x) = \frac{(\text{sen}x)'}{\text{sen}x}$$

Se sabe que: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

En la función g: $g'(x) = (\text{sen}x)'\left(\frac{1}{\text{sen}x}\right)$

Por la regla de la cadena, se tiene:

$[\ln(\text{sen}x)]' = (\text{sen}x)'\left(\dfrac{1}{\text{sen}x}\right) = \dfrac{\cos x}{\text{sen}x}$

$\Rightarrow\ [\ln(\text{sen}x)]' = \cot x,\ x \in \langle 0; \pi\rangle$

También sabemos que para una función constante $h(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$, se cumple: $h'(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Entonces, la función g tendría la siguiente forma:

$g(x) = \ln(\text{sen}x) + c;\ x \in \langle 0; \pi\rangle;\ c \in \mathbb{R}$

Por dato, $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ es una raíz del polinomio:

$P(x) = x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$

Factorizando por aspa doble especial:

$$\begin{array}{ccccc} x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256 \\ x^2 \qquad -8x \qquad 16 \\ x^2 \qquad -8x \qquad 16 \end{array}$$

$\Rightarrow\ P(x) = (x^2 - 8x + 16)(x^2 - 8x + 16)$

$P(x) = (x-4)^2(x-4)^2$

$P(x) = (x-4)^4$

Luego: $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\text{sen}\dfrac{\pi}{2}\right) + c \Rightarrow g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = c$

Reemplazando: $P(c) = 0$

$(c-4)^4 = 0 \ \Rightarrow\ c = 4$

$\therefore\ g(x) = \ln(\text{sen}x) + 4$

8 Halla la derivada de la siguiente función:

$f(x) = \text{arccot}\left(\dfrac{x\text{arcsec}\theta}{1 - x\tan\theta}\right)$

Resolución:

Sea: $g(x) = \dfrac{x\,\text{arc}\sec\theta}{1 + x\tan\theta}$

$$\Rightarrow\ g'(x) = \frac{(x\,\text{arc}\sec\theta)'(1 + x\tan\theta) - (x\,\text{arc}\sec\theta)(1 + x\tan\theta)'}{(1 + x\tan\theta)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\text{arcsec}\theta(1 + x\tan\theta) - x\text{arcsec}\theta\tan\theta}{1 + 2x\tan\theta + x^2\tan^2\theta}$$

$$g'(x) = \frac{\text{arc}\sec\theta}{1 + 2x\tan\theta + x^2\tan^2\theta}$$

Luego, por la regla de la cadena:

$[f(g(x))]' = g'(x)\,f'(g(x))$

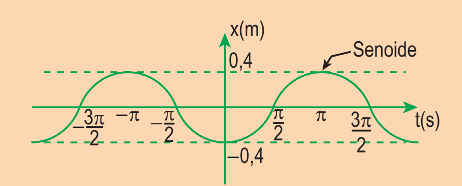
$$[f(g(x))]' = -\frac{g'(x)}{1 + g^2(x)} \Rightarrow [f(g(x))]' = -\frac{\dfrac{\text{arcsec}\theta}{1 + 2x\tan\theta + x^2\tan^2\theta}}{1 + \left(\dfrac{x\,\text{arc}\sec\theta}{1 + x\tan\theta}\right)^2}$$

$$= -\frac{\dfrac{\text{arc}\sec\theta}{1 + 2x\tan\theta + x^2\tan^2\theta}}{1 + \dfrac{x^2\text{arc}\sec^2\theta}{1 + 2x\tan\theta + x^2\tan^2\theta}}$$

$$= -\frac{\dfrac{\text{arc}\sec\theta}{1 + 2x\tan\theta + x^2\tan^2\theta}}{\dfrac{1 + 2x\tan\theta + x^2\tan^2\theta + x^2\text{arc}\sec^2\theta}{1 + 2x\tan\theta + x^2\tan^2\theta}}$$

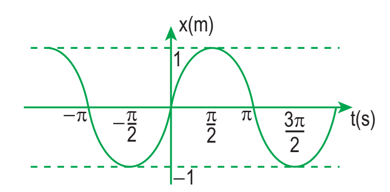
$$\therefore\ f'(x) = \frac{\text{arc}\sec\theta}{1 + 2x\tan\theta + x^2\tan^2\theta + x^2\text{arc}\sec\theta}$$

9 Se muestra la gráfica del movimiento de una partícula. Determina la ecuación de la aceleración y su gráfica.

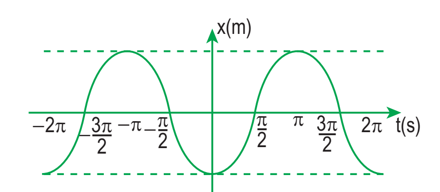


Resolución:

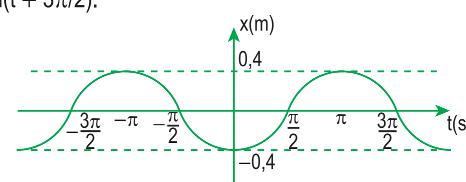
Sabemos que la gráfica de sent, es:



Desplazamos la gráfica hacia la derecha $\pi/2$ unidades, entonces, se obtiene $\text{sen}(t - \pi/2)$ que también sería equivalente a desplazar hacia la izquierda $3\pi/2$ unidades obteniéndose: $\text{sen}(t + 3\pi/2)$.



Encogiendo la gráfica verticalmente en un factor 0,4, se tiene: $0{,}4\text{sen}(t + 3\pi/2)$.



Luego, la ecuación del movimiento es:

$x(t) = 0{,}4\text{sen}(t + 3\pi/2)$ m

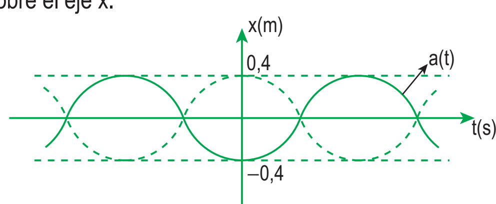
Nos piden la ecuación de la aceleración:

$v = \dfrac{dx}{dt} = 0{,}4\cos(t + 3\pi/2)$ m/s

$a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\,0{,}4\text{sen}(t + 3\pi/2)$ m/s^2

Se observa que: $a(t) = -x(t)$

Entonces la gráfica de a(t) se obtiene por reflexión de la gráfica de x(t) sobre el eje x.



Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos situados en
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, S.J.L. Lima, Perú
RUC 10090984344